Chapitre 12 ~ Trigonométrie

I – Enroulement de la droite

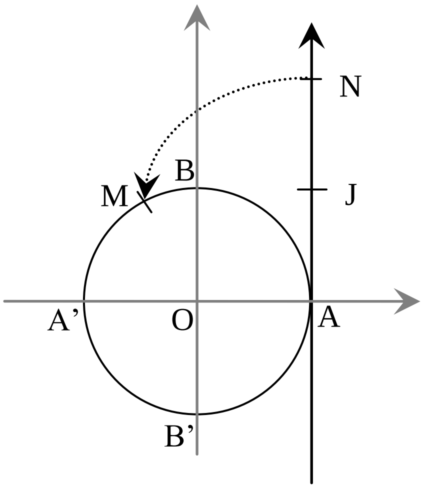
Définition

Dans le plan muni d'un repère (O, A, B) et orienté positivement (l'explication se trouve ci-dessous), on appelle <u>cercle trigonométrique</u> le cercle de centre O passant par A (donc de rayon 1).

Dans ce repère, on considère le point J de coordonnées (1 ; 1) qui permet de donner une orientation à la droite (AJ). En « enroulant » cette droite sur le cercle, on obtient une unique correspondance entre un point N de la droite et un point M du cercle trigonométrique noté $\mathscr{C}$.

Cet enroulement explique l'orientation positive du cercle : le sens positif est par convention le sens contraire des aiguilles d'une montre, il est aussi appelé <u>**sens trigonométrique**</u>.

Sur le schéma ci-contre, le point N d'abscisse 2 sur la droite orientée se retrouve, après « enroulement » de la droite sur le cercle, en M tel que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est égale à la longueur AN.



Remarques

* Puisque $\mathscr{C}$ est de rayon 1, son périmètre vaut 2π.
* Le point de la droite orientée d'abscisse 2π se retrouve ainsi, après enroulement, sur le point A : on a fait un tour complet du cercle.

Propriété

On obtient les correspondances suivantes :

Abscisse du point N sur la droite orientée	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
Mesure de l'angle $\widehat{AOM}$	– 90°	0°	90°	180°	270°	360°

Remarques

Plusieurs points de la droite orientée atterrissent sur le même point du cercle $\mathscr{C}$:

* les points d'abscisses $-\dfrac{3\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ se retrouvent tous les deux, après enroulement, sur le point B ;
* les points d'abscisses $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$ se retrouvent tous les deux, après enroulement, sur le point B' !

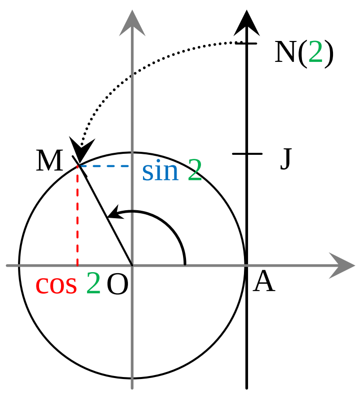
	En classe : 2, 4 p. 224	Exercices : 1, 3, 5 p. 224

II – Cosinus et sinus… d'un nombre réel

Définition

Soit x un nombre réel. On considère le point N d'abscisse x sur la droite orientée, et le point M sur le cercle trigonométrique qui lui correspond par enroulement.

- **Le <u>cosinus</u> de x est l'abscisse du point M et est noté cos x ;**
- **Le <u>sinus</u> de x est l'ordonnée du point M et est noté sin x.**



Remarques

- On obtient deux données proportionnelles : l'angle $\widehat{AOM}$ et la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ (en effet, plus l'angle est grand, plus la mesure de l'arc l'est aussi). Cette correspondance permet de définir une nouvelle unité d'angle : le **radian**. Un radian est donc un angle formé sur un cercle trigonométrique (de rayon 1) dont l'arc intercepté par cet angle mesure une unité. L'angle complet mesure ainsi 2π radians.
- Ce qui a été vu au collège reste d'actualité ici, il suffit juste de choisir sur la droite orientée des abscisses strictement comprises entre 0 et π/2 (ce qui correspond en radians à un angle aigu).

Propriété

Pour tout nombre réel x, on a :

1. **$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *[remarque : $\sin^2 x$ est une notation pour* $(\sin x)^2$*]* ;**

2. **$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$;**

3. **$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.**

• Notons H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore donne : $OM^2 = OH^2 + HM^2 \Leftrightarrow 1 = \cos^2 x + \sin^2 x$.
• Évident car le cercle trigonométrique est de rayon 1. Tous les points de ce cercle ont donc nécessairement une abscisse et une ordonnée comprise entre − 1 et 1.
• Les angles correspondant aux réels x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Les égalités s'en déduisent immédiatement (rajouter ne point N' d'abscisse − 2 sur la figure ci-dessus, et enrouler la droite pour bien comprendre !).

	En classe : **9 p. 224 + 12, 16 p. 225 + 22 p. 226**	**Exercices :** **8, 10 p. 224 + 13, 17, 18 p. 225**

III – Valeurs particulières

Propriété

Il est utile de connaître ou de savoir retrouver rapidement les cosinus et sinus des angles suivants :

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
cos α	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
\sin α	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**