Chapitre 4 ~ Équations & inéquations

Commencer par étudier la fiche « 04 - COMPLÉMENT - Implication & équivalence.doc »…

I – Résolution d'une équation

1. Rappels

Propriétés

Soient X, Y et Z trois réels quelconques. Alors

1. **$X = Y \Leftrightarrow X + Z = Y + Z$;**
2. **$X = Y \Leftrightarrow X - Z = Y - Z$;**
3. **$X = Y \Leftrightarrow XZ = YZ$, à condition que $Z \neq 0$;**
4. **$X = Y \Leftrightarrow \dfrac{X}{Z} = \dfrac{Y}{Z}$, à condition que $Z \neq 0$;**
5. **$XY = 0 \Leftrightarrow X = 0$ ou $Y = 0$.**

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $3x^2 = 9x$.

Solution :

Méthode fausse

(E) $\Leftrightarrow 3x = 9$ ← Équivalence fausse : on a divisé les deux membres de l'équation par x qui peut être nul (la condition 4 ci-dessus n'est donc pas vérifiée !!!)
(E) $\Leftrightarrow x = 3$
$\mathcal{S} = \{3\}$.

Méthode juste

(E) $\Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0$
(E) $\Leftrightarrow 3x(x - 3) = 0$
(E) $\Leftrightarrow 3x = 0$ ou $x - 3 = 0$
(E) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$
$\mathcal{S} = \{0 ; 3\}$.

2. Valeurs interdites

Avant de résoudre une équation (ou simultanément quand on sera plus à l'aise), il faut éliminer les « valeurs interdites » qui pourraient annuler un dénominateur ou rendre ce qui est sous une racine négatif…

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\dfrac{3x^2}{x+1} = \dfrac{6x^2 - 4x}{(3x-2)(x+1)}$.

Solution :

Conditions : $x + 1 \neq 0$ et $(3x - 2)(x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq \dfrac{2}{3}$

Résolution :

(E) $\Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{x+1} = \dfrac{6x^2 - 4x}{(3x-2)(x+1)}$

(E) $\Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{x+1} = \dfrac{2x\,\cancel{(3x-2)}}{\cancel{(3x-2)}(x+1)}$ (factorisation de $6x^2 - 4x$ par $4x$ qui est un facteur commun)

(E) $\Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{x+1} - \dfrac{2x}{x+1} = 0$ (propriété 2)

(E) $\Leftrightarrow \dfrac{3x^2 - 2x}{x+1} = 0$ (règle de calcul pour deux fractions ayant même dénominateur)

(E) $\Leftrightarrow \dfrac{x\,(3x-2)}{x+1} = 0$ (factorisation de $3x^2 - 2x$ par x qui est un facteur commun)

(E) $\Leftrightarrow x\,(3x - 2) = 0$ (on utilise la propriété 4 : en effet, les conditions nous assurent que $x + 1 \neq 0$)

(E) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $3x - 2 = 0$ (on aboutit à une équation-produit qui nous amène à utiliser la propriété 5)

(E) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{3}$ (on n'oublie pas les valeurs interdites → 2/3 n'est PAS solution !)

Conclusion : $\mathcal{S} = \{0\}$.

Remarque

Du point de vue de la rédaction, toujours penser aux équivalences !

	En classe : **1, 2, 5, 9, 13 p. 140**	**Exercices :** **3, 6, 7, 10, 11 p. 140**

3. *Méthode de résolution*

Globalement, il existe plusieurs méthodes de résolution d'une équation. Il faut toujours se baser sur l'équation donnée :

- s'il y a des parenthèses, il y a de grandes chances pour qu'il faille les développer ;
- si ça n'aboutit pas, il faut peut-être chercher à factoriser (de manière directe ou en passant par une identité remarquable) afin d'aboutir à une équation-produit ;
- …

De temps en temps, surtout pour des équations de degré 2 (contenant un terme en x^2), il va falloir ruser…

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2x^2 + x - 3 = 0$.

Solution :
Notons déjà qu'il n'y a pas de condition particulière. Il n'y a pas de parenthèse, et la méthode classique qui consiste à mettre tous les « x » d'un côté et les nombres de l'autre ne peut aboutir. On va quand même factoriser astucieusement en utilisant une identité remarquable :

(E) $\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$

(E) $\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 0$ (on fait apparaître une parenthèse où x^2 n'a pas de coefficient)

(E) $\Leftrightarrow 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{3}{2}\right] = 0$ (on utilise l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)

(E) $\Leftrightarrow 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] = 0$

(E) $\Leftrightarrow 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] = 0$ (on a reconnu l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$)

(E) $\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right) = 0$

(E) $\Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{4}\right)\left(x - \frac{4}{4}\right) = 0$ (propriété 4)

(E) $\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1) = 0$ (on a une équation-produit)

(E) $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ ou $x = 1$.

Finalement, $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2} ; 1\right\}$

Cette méthode est certes longue, mais elle nous permettra de savoir résoudre à peu près toutes les équations. En particulier, pour les équations de degré 2 comme celle-là, une méthode plus rapide sera vue l'année prochaine pour ceux qui iront en S.

	En classe : **19, 20 p. 240**	**Exercices :** **21, 23 p. 141**

II – Résolution d'une inéquation

1. *Rappels*

Propriétés

Soient X, Y et Z trois réels quelconques. Alors

1. **$X > Y \Leftrightarrow X + Z > Y + Z$;**
2. **$X > Y \Leftrightarrow X - Z > Y - Z$;**
3. **Si $Z > 0$, alors $X > Y \Leftrightarrow XZ > YZ$,**
   Si $Z < 0$, alors $X > Y \Leftrightarrow XZ < YZ$;
4. **Si $Z > 0$, alors $X < Y \Leftrightarrow \frac{X}{Z} < \frac{Y}{Z}$,**
   Si $Z < 0$, alors $X < Y \Leftrightarrow \frac{X}{Z} > \frac{Y}{Z}$.

Toutes ces propriétés sont aussi valables en changeant les inégalités strictes par des larges, et en changeant le sens de toutes les inégalités.

2. Tableau de signe (expression du premier degré)

En étudiant le signe d'une expression du premier degré, par exemple $-3x+4$, on détermine que :

• $-3x+4<0 \Leftrightarrow -3x<-4 \Leftrightarrow x>\dfrac{-4}{-3}$ (le signe change car $-3<0$!) $\Leftrightarrow x>\dfrac{4}{3}$;

• $-3x+4>0 \Leftrightarrow -3x>-4 \Leftrightarrow x<\dfrac{-4}{-3}$ (le signe change encore, toujours parce que $-3<0$!) $\Leftrightarrow x<\dfrac{4}{3}$.

Cette écriture n'est pas très commode, on introduit alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3x+4$		$+$	0	$-$	

De manière plus générale,

Propriété

Soit $ax+b$ une expression du premier degré, avec $a \neq 0$.

Si $a>0$, alors le signe de $ax+b$ est donné par le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

Si $a<0$, alors le signe de $ax+b$ est donné par le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

Exercice : Déterminer le signe de l'expression $5x-7$.

Solution :
Dans la pratique, on cherche quand ça s'annule, puis on utilise la propriété ci-dessus : $5x-7=0 \Leftrightarrow 5x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{5}$. Puisque le coefficient de x est positif, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{7}{5}$		$+\infty$
Signe de $5x-7$		$-$	0	$+$	

	En classe : 24, 27 p. 141	Exercices : 25, 26, 28 p. 141

3. Tableau de signe (d'un produit ou d'un quotient)

Pour déterminer le signe d'un produit (resp. d'un quotient), on détermine le signe de chaque facteur (resp. du numérateur et du dénominateur), puis on applique la règle des signes. Les deux peuvent se faire simultanément.

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (I) $\dfrac{4\,(x+1)}{x+3} \geqslant x+1$.

Solution :
On n'oublie pas les conditions : il faut que $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$. On va faire apparaître des produits et quotients dont on pourra déterminer les signes (c'est-à-dire qu'on pourra comparer à 0) :

(I) $\Leftrightarrow \dfrac{4\,(x+1)-(x+1)(x+3)}{x+3} \geqslant 0$

(I) $\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(4-x-3)}{x+3} \geqslant 0$

(I) $\Leftrightarrow \dfrac{(1+x)(1-x)}{x+3} \geqslant 0$

Il ne reste plus qu'à faire un tableau de signes puis donner la conclusion : →

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe du quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Pourquoi y a-t-il une double-barre et pas un 0 ??? Expliquer à ce moment-là pourquoi et où on met des doubles-barres…

Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty\,;\,3[\cup [-1\,;\,1]$.

« 04 - EXOS - équations, inéquations.doc »	En classe : 29, 31 p. 141 + 35, 36, 37, 40, 43 p. 142	Exercices : 30 p. 141 + 32, 33, 38, 41, 44 p. 142