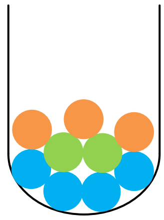
Chapitre 9 ~ Probabilités

Dans tout ce chapitre, tous les exemples seront basés sur les trois expériences suivantes :

On lance un dé à 6 faces équilibré et on regarde le chiffre sur la face supérieure

On tire au hasard une carte parmi 32 et on regarde la carte obtenue

On tire au hasard une boule dans une urne qui en contient 2 vertes, 3 oranges et 4 bleues. On regarde la couleur de la boule tirée



I – Vocabulaire

Définition

Une <u>expérience aléatoire</u> est une expérience comportant plusieurs issues envisageables et dont on ne peut pas prévoir l'issue en la réalisant. L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire forme son <u>univers</u>, généralement noté Ω. *<u>Dans ce cours, les expériences aléatoires n'auront qu'un nombre fini d'issues.</u>*

Un <u>événement</u> est une condition qui peut être, ou ne pas être, réalisée lors de l'expérience. S'il est réalisé, il peut l'être par une ou plusieurs issues de cette expérience ;

Un <u>événement élémentaire</u> est un événement qui n'est réalisé que par une seule issue.

Exemples :

Le dé à 6 faces

Cette expérience admet six issues : 1, 2, 3, 4, 5 *et* 6

$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

- « on obtient 4 » *est un événement élémentaire.*
- « on obtient 7 » *est un <u>**événement impossible**</u>.*
- « on obtient un nombre impair » *est un événement réalisé par les issues 1, 3, 5.*

Le jeu de cartes

Cette expérience admet 32 issues possibles.

Ω = {as♠ ; as♡ ; … ; 7◇ ; 7♣}

- « on obtient as ♡ » *est un événement élémentaire.*
- « on obtient un roi » *est un événement non élémentaire (réalisé par 4 issues)*
- « on obtient 7◇ » *est un événement impossible*

L'urne

Cette expérience admet … issues possibles.

Ω =

- *événement élémentaire :* « on obtient une boule verte »
- *événement non élémentaire :* « on obtient une couleur primaire *(synthèse additive)* [1] »
- *événement impossible :* « on obtient une boule noire »

	En classe : **1, 2 p. 307**	**Exercices :** **3, 4, 5 p. 307**

II – Probabilités

Définition

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement A se rapproche d'une « *fréquence théorique* », appelée <u>probabilité de l'événement A</u> et notée *p*(A).

[1] : *Pour la synthèse additive (lumière), on a rouge, vert et bleu ; pour la synthèse soustractive (peinture & imprimerie), on a magenta, cyan et jaune.*

Exemples :

Le dé à 6 faces

si A désigne l'événement « obtenir 5 », *alors p(A) = 1/6. En effet, en* « *théorie* », *on a une chance sur 6 d'obtenir 5.*

→ voir « 09 - dé.xlsx »

Le jeu de cartes

si A désigne l'événement « obtenir un as de ◊ », *alors p(A) = 1/32.*

Si B désigne « obtenir une dame », *alors p(B) = 4/32 = 1/8.*

L'urne

p(V) = 2/9

p(B) = 4/9

p(O) = 3/9

À quoi correspondent les événements V, B et O ?

Propriétés

- **Une probabilité est un nombre toujours compris entre 0 et 1 : $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$;**
- **Un événement impossible a une probabilité nulle : $p(\varnothing) = 0$**
- **Un événement dont la probabilité vaut 1 est appelé <u>événement certain</u> : $p(\Omega) = 1$.**
- **La somme des probabilités de tous les événements élémentaires vaut toujours 1.**

Définition

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, ont dit qu'il s'agit d'une situation <u>d'équiprobabilité</u>.

Exemples :

Le dé à 6 faces

On vérifie facilement que toutes les issues ont la même probabilité (1/6), on a donc une situation d'équiprobabilité.

Le jeu de cartes

A-t-on une situation d'équiprobabilité ?

L'urne

A-t-on une situation d'équiprobabilité ?

Propriété

Si une expérience aléatoire possède n issues équiprobables, alors :

- la probabilité d'un événement élémentaire est égale à l'inverse de n : $\frac{1}{n}$.

- la probabilité d'un événement A est égale à $\frac{\text{card}(A)}{n}$.

Exemples :

Le dé à 6 faces

- *La probabilité d'un événement élémentaire est égale à $\frac{1}{6}$.*
- *Si A désigne l'événement* « obtenir un nombre pair », *alors $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (car il y a 3 nombres pairs : 2, 4 et 6).*

Le jeu de cartes

- *La probabilité d'un événement élémentaire est égale à $\frac{1}{32}$.*
- *Si B désigne l'événement* « obtenir un ♡ », *alors $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ (car il y a 8 cartes ♡).*

L'urne

- *Les 3 événements élémentaires ont des probabilité différentes.*
- *Si C désigne l'événement « obtenir une couleur primaire », alors $p(C) = \frac{4+2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{1}{3}$.*

TP : 1 p. 303	En classe : 9, 11 p. 307	Exercices : 10, 12, 14, 19 p. 307

Définition & propriété

Pour un événement A, l'<u>événement contraire de A</u>, noté $\overline{A}$, contient l'ensemble des événements élémentaires n'appartenant pas à A. On a alors l'égalité

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

Notons $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ l'univers de l'expérience. Considérons $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, d'où (d'après la définition) $\overline{A} = \{e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n\}$. Comme la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent, on a :

$$p(A) = p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_k) \quad \text{et} \quad p(\overline{A}) = p(e_{k+1}) + p(e_{k+2}) + \cdots + p(e_n).$$

Par suite, $p(A) + p(\overline{A}) = p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_k) + p(e_{k+1}) + p(e_{k+2}) + \cdots + p(e_n) = p(\Omega) = 1$. On en déduit donc l'égalité recherchée :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

Exemples :

Le dé à 6 faces

Si I désigne l'événement « obtenir un nombre pair », *alors $\overline{I}$ désigne l'événement* « obtenir un nombre impair », *et*

$$p(\overline{I}) = 1 - p(I) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Le jeu de cartes

Si C désigne l'événement « obtenir un ♡ », *alors $\overline{C}$ désigne l'événement* « ne pas obtenir un ♡ », *et*

$$p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

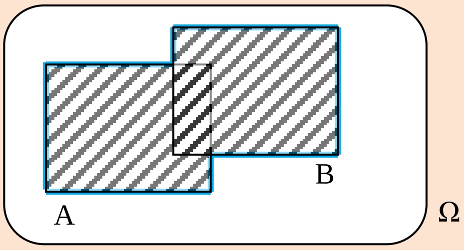
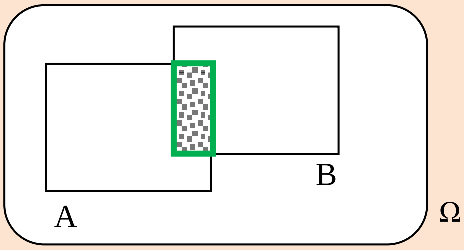
L'urne

Si B désigne l'événement « obtenir une boule bleue », alors $\overline{B}$ désigne l'événement « obtenir une boule verte ou orange », *et*

$$p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

	En classe : 8 p. 307	Exercices : 21, 22 p. 308

III – Réunions et intersections

∪ (réunion)	∩ (intersection)
 	
L'événement « A ou B », noté **A ∪ B**, désigne la réunion des événements A et B. Il est réalisé lorsqu'un des deux événements l'est.	L'événement « A et B », noté **A ∩ B**, désigne l'intersection des événements A et B. Il est réalisé lorsque les deux événements le sont simultanément.

Exemple (le jeu de cartes) : Si A désigne l'événement « obtenir un nombre pair » *et B* « obtenir un multiple de 3 », *alors :*

* $A \cup B =$

* $A \cap B =$

Définition

On dit que les événements A et B sont incompatibles s'ils sont disjoints (donc quand A ∩ B = ∅).

Propriété

Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors

$$p(A \cup B) = \begin{cases} p(A) + p(B) & \text{si A et B sont incompatibles} \\ p(A) + p(B) - p(A \cap B) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque

- A et $\overline{A}$ sont incompatibles car $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
- $A \cup \overline{A} = \Omega$, donc $p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}) = p(\Omega) = 1$ (cela explique plus rapidement la propriété précédente).

En prenant toutes les issues de l'événement A, puis toutes les issues de l'événement B, on constate que les issues se trouvant dans l'événement $A \cap B$ ont été compté deux fois. Au final, on a bien
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemple (avec le jeu de cartes) : si R désigne l'événement « obtenir un roi *» et C «* obtenir un ♡ *», alors :*

- *$A \cap B$ est l'événement «* obtenir le roi de ♡ *»* $\Rightarrow p(A \cap B) = 1/32$
- $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ *et* $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.

Combien y a-t-il de cartes "roi" ? Combien de cartes ♡ ? Y en a-t-il qui ont été comptées deux fois ??

	En classe : **24, 25, 26 p. 309**	**Exercices :** **27, 28, 29 p. 309**