

Probabilités

I) Expériences aléatoires et évènements :

définition : Une **expérience aléatoire** est une expérience ayant plusieurs **issues** (ou **résultats**) dont on **ne peut pas prévoir ni calculer de façon certaine laquelle de ces issues sera réalisée**.

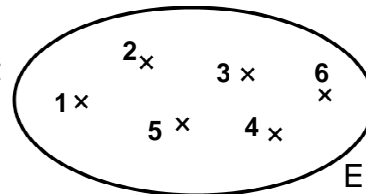
Pour **définir** une expérience aléatoire, on précise son **déroulement** et l'ensemble **E** de toutes les issues possibles.

Ex : On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on note le numéro porté par la face supérieure.



L'ensemble E de toutes les issues possibles s'écrit

$$E = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$$



E est appelé l'**univers** de l'expérience.

on représentera parfois un ensemble en utilisant ce type de diagramme.



définition : Un **évènement A** est **une partie de l'univers E**.

Ex : Reprenons l'exemple précédent.

Définissons un évènement A par l'expression : « **le numéro obtenu est pair** »

Cet évènement A peut s'écrire sous forme d'une partie de E :

$$A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}.$$

l'issue 2 réalise l'évènement A car l'issue 2 est dans l'ensemble A.



définitions :

- l'**évènement contraire** d'un évènement A est la partie constituée de toutes les **issues** de E **qui ne sont pas dans A**. On le note **\bar{A}** .
- un évènement **élémentaire** est une partie de E ne contenant q' **une seule issue**.
- **E** est appelé l'**évènement certain**.
- \emptyset est l'**évènement impossible**, il n'y a pas d'issue possible.

Ex : Reprenons l'exemple précédent.

$\bar{A} = \{ 1 ; 3 ; 5 \}$ est l'évènement **contraire** de A

\bar{A} : « le numéro obtenu est impair »

l'évènement B tel que $B = \{ 4 \}$ est **élémentaire**

B : « le numéro obtenu est 4 »

E est l'évènement **certain**

E : « le numéro obtenu est compris entre 1 et 6 »

\emptyset est l'évènement **impossible**

\emptyset : « le numéro obtenu est 24 »

II) Probabilité d'un évènement :

rappel : Si on effectue **un très grand nombre de fois une expérience aléatoire**, la **fréquence de réalisation d'un évènement** se stabilise autour d'un nombre : **la probabilité de cet évènement**.

Exemple : Je jette un très grande nombre de fois une pièce sur le sol. On constate que le nombre de "pile" obtenu est sensiblement égal au nombre de "face". J'ai autant de chances d'obtenir "face" que "pile". La probabilité de **l'évènement A** : "**obtenir pile**" est de 50% soit **0,5**. On écrit **$p(A) = 0,5$**



En généralisant, supposons une expérience aléatoire ayant un nombre d' issues **n**. Les issues seront notées **$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$**
L'univers E de l'expérience sera **$E = \{ e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \}$**

a) loi de probabilité :

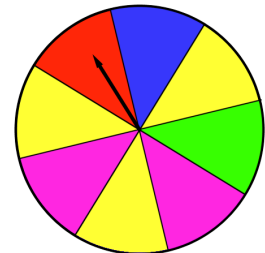
définition : Une **loi de probabilité** est définie par un ensemble E constitué d'éléments appelés **issues et des probabilités correspondantes**.

Chaque **probabilité** est un **nombre positif** et la **somme de toutes les probabilités** est égale à **1**. On peut la définir sous forme de tableau.

issues	e_1	e_2	e_3	e_n
probabilités	$p(e_1)$	$p(e_2)$	$p(e_3)$	$p(e_n)$

Ex : On lance la roue de loterie ci-contre et on observe la couleur désignée. On peut associer à ce jeu la loi de probabilité suivante :

issues	rouge	bleu	jaune	violet	vert
probabilités	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



définition : La **probabilité d'un évènement** est la **somme des probabilités des évènements élémentaires** qu' il comprend.

Ex : Reprenons l'expérience précédente.

Considérons l'évènement **F** défini par « **la couleur obtenue est rouge ou jaune** »

La probabilité de l'évènement F est $p(F) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$



Dans notre loi de probabilité, la somme des probabilités est bien égale à 1

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

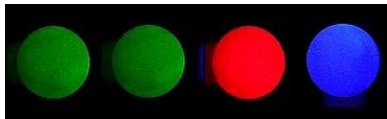
remarques :

- la probabilité de **l'évènement certain** est 1 **$p(E) = 1$**
- la probabilité de **l'évènement impossible** est 0 **$p(\emptyset) = 0$**
- la probabilité de **tout évènement A** est comprise entre 0 et 1 **$0 \leq p(A) \leq 1$**

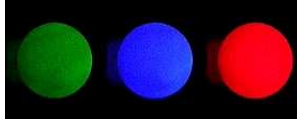
b) cas d'une expérience comportant plusieurs épreuves :

Ex : Une expérience aléatoire est composée des trois épreuves suivantes :

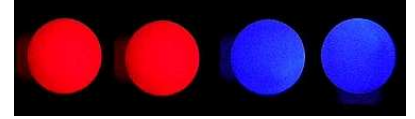
1. on tire au hasard une boule dans un premier sac et on note la couleur
2. on recommence avec un deuxième sac
3. on tire enfin une dernière boule dans le troisième sac



sac 1
2 vertes, 1 rouge, 1 bleue

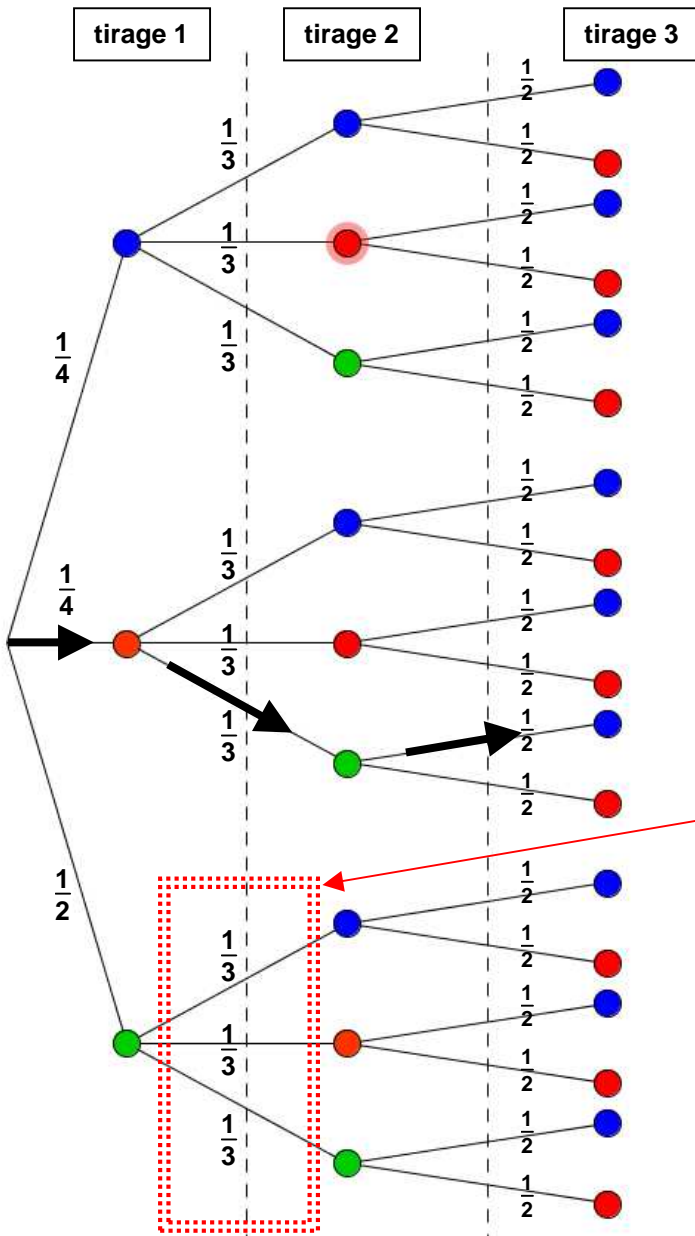


sac 2
1 verte, 1 bleue, 1 rouge



sac 3
2 rouges, 2 bleues

On range ensuite les trois boules par ordre de tirage dans une boîte. Pour connaître les probabilités d'obtenir tel ou tel ordonnancement de couleur, on peut utiliser **un arbre pondéré**.



propriété : la probabilité d'un évènement est le **produit des probabilités** rencontrées sur le "chemin" conduisant à cet évènement.

Ex : La probabilité d'obtenir l'ordonnancement **rouge, vert, bleu** est obtenue ainsi :

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

propriété : la **somme des probabilités** de toutes les **branches issues d'un même nœud** est égal à 1.

Ex : Observez la zone entourée de pointillés rouges. La somme des probabilités de chaque branche est : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

c) cas d'événements élémentaires (issues) équiprobables :

définition : On a une situation d'équiprobabilité quand **les issues** (événements élémentaires) ont la **même probabilité**

on peut dire aussi que la loi de probabilité est **équirépartie** !

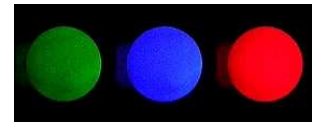


Ex : On tire au hasard une boule dans le sac ci-contre et on note la couleur obtenue.

L'univers E est $E = \{\text{rouge, vert, bleu}\}$

La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{3}$

$$p(\text{rouge}) = p(\text{vert}) = p(\text{bleu}) = \frac{1}{3}$$



sac
1 verte, 1 bleue, 1 rouge

propriété : En cas d'équiprobabilité des issues, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}$$

dans le cas d'une loi de probabilité équirépartie (issues équiprobables) on a : $p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$



Ex : On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on note le numéro porté par la face supérieure.

Soit l'événement A : « le numéro obtenu est impair »

On a l'univers $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $A = \{1; 3; 5\}$

La situation est une **situation d'équiprobabilité**. On a donc :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

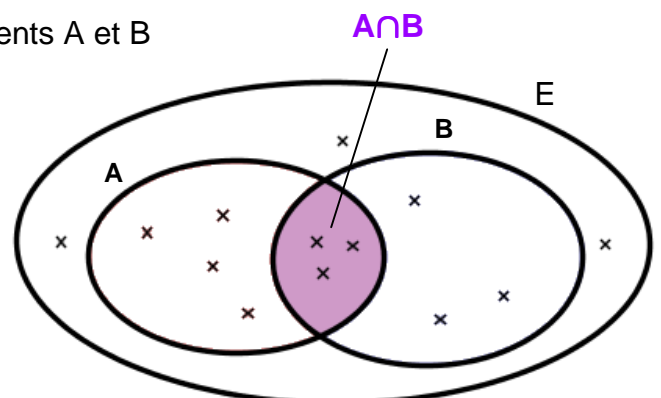
III) Calculs de probabilités :

a) intersection et réunion : Soient deux événements A et B

définitions :

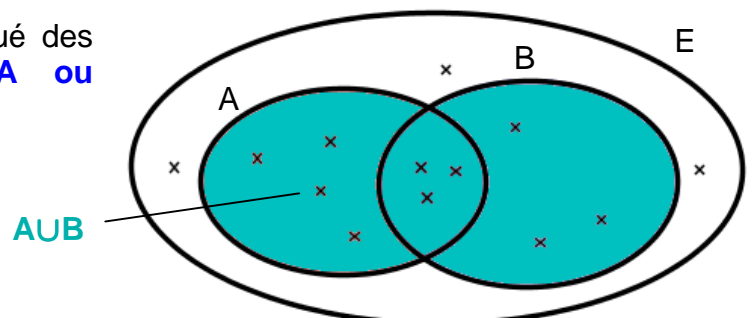
- L'événement "**A et B**" est constitué des issues réalisant à la fois **l'événement A et l'événement B**.

On le note : **$A \cap B$** "A inter B"



- L'événement "**A ou B**" est constitué des issues réalisant **l'événement A ou l'événement B**.

On le note : **$A \cup B$** "A union B"



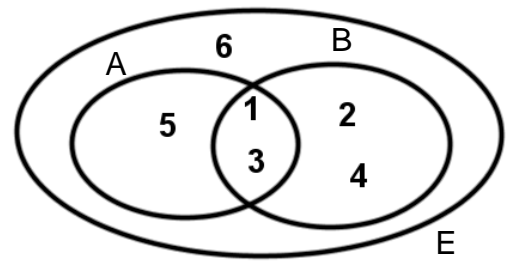
Ex: Reprenons l'expérience précédente avec le dé.

Considérons les événements A et B

A : « le numéro obtenu est impair »

B : « le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4 »

$$A = \{1; 3; 5\} \quad B = \{1; 2; 3; 4\}$$



L'intersection de A et B, $A \cap B = \{1; 3\}$

$A \cap B$: « le numéro obtenu est impair **et** inférieur ou égal à 4 »

La réunion de A et B, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$A \cup B$: « le numéro obtenu est impair **ou** inférieur ou égal à 4 »

propriété : Quels que soient les événements A et B :

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$$

► **démonstration**

Faisons la démonstration dans le cas particulier précédent.

Dans le cas général, on procéderait de la même façon.

on a donc : $A = \{1; 3; 5\}$ $B = \{1; 2; 3; 4\}$ $A \cap B = \{1; 3\}$ $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$$p(A) + p(B) = [p(1) + p(3) + p(5)] + [p(1) + p(2) + p(3) + p(4)]$$

$$= [p(1) + p(3)] + [p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)]$$

$$= p(A \cap B) + p(A \cup B)$$

b) événements incompatibles :

définition : Deux événements A et B sont **incompatibles** quand leur intersection est vide.

ils ne peuvent se produire tous deux pendant la même expérience !



Ex: Reprenons l'expérience précédente avec le dé.

Considérons les événements A et B

A : « le numéro obtenu est impair » $A = \{1; 3; 5\}$

B : « le numéro obtenu est pair » $B = \{2; 4; 6\}$

$A \cap B$: « le numéro obtenu est pair **et** impair » $A \cap B = \emptyset$

Les événements A et B sont **incompatibles**.

propriété : Si deux événements A et B sont incompatibles, alors

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

► **démonstration**

Cette propriété est la conséquence de la propriété précédente.

Soient deux événements A et B incompatibles, on a par définition :

$$A \cap B = \emptyset$$

donc, $p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$

or, d'après la propriété précédente, $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$

par suite, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

c) probabilité de l'événement contraire :

propriété : Pour deux événements contraires A et \bar{A} ,

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

► **démonstration**

Par définition, l'événement contraire de A est constitué de toutes les issues de l'univers E n'appartenant pas à A. De plus, les événements A et \bar{A} sont incompatibles.

donc, $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$

or, $p(A \cup \bar{A}) + p(A \cap \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$ (propriété du paragraphe a)

donc, $p(E) + 0 = p(A) + p(\bar{A})$

donc, $p(A) + p(\bar{A}) = p(E) = 1$