Pour démarrer la classe de seconde

Tout ce qu'il faut savoir

Paul Milan

DERNIÈRE IMPRESSION LE 18 novembre 2017 à 8:56

Table des matières

Chapitre 1

Calcul

1 Calcul sur les fractions

1.1 Fractions égales

Théorème 1 : On ne change pas le rapport d'une fraction en multipliant (ou en divisant) numérateur et dénominateur par un même nombre non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemple : Simplification de fractions :

$$\frac{25}{75} = \frac{25 \div 25}{75 \div 25} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{35}{42} = \frac{35 \div 7}{42 \div 7} = \frac{5}{6}$$

1.2 Position du signe

Pour tous entiers a et $b \neq 0$, on a : $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$

1.3 Addition, soustraction

Théorème 2 : $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$ et $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}$

Exemples : Deux fractions au même dénominateur :

$$\frac{5}{7} + \frac{8}{7} = \frac{5+8}{7} = \frac{13}{7} \quad \text{et} \quad \frac{15}{11} - \frac{6}{11} = \frac{15-6}{11} = \frac{9}{11}$$

Deux fractions avec des dénominateurs différents. On réduit alors les fractions au même dénominateur :

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{3} = \frac{5}{6} + \frac{14}{6} = \frac{19}{6} \quad \text{et} \quad \frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = -\frac{1}{24}$$

1.4 Multiplication

Théorème 3 : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$

Exemple : $5 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ et $\frac{5}{4} \times \frac{7}{3} = \frac{35}{12}$

Il est préférable de simplifier avant d'effectuer les produits :

$$\frac{15}{11} \times \frac{33}{25} = \frac{15 \times 33}{11 \times 25} = \frac{5 \times 3 \times 11 \times 3}{11 \times 5 \times 5} = \frac{9}{5}$$

1.5 Division

Théorème 4 : Pour tous entiers non nul a, b, c et d,

diviser revient à multiplier par l'inverse : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exemple : $5 \div \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$ $\qquad$ $\frac{5}{4} \div 3 = \frac{5}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

$$\frac{4}{15} \div \frac{12}{35} = \frac{4}{15} \times \frac{35}{12} = \frac{4 \times 35}{15 \times 12} = \frac{4 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 3 \times 4} = \frac{7}{3 \times 3} = \frac{7}{9}$$

2 Calcul sur les puissances

2.1 Définitions

Définition 1 : Soit un entier n et un nombre non nul quelconque a,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}} \qquad \text{et} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemple : $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ et $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

2.2 Opérations sur les puissances

Théorème 5 : Si $a \neq 0$ est un nombre et n et p deux entiers, on a :

Multiplication : $a^n \times a^p = a^{n+p}$

Exponentiation : $(a^n)^p = a^{n \times p}$

Division : $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Exemple : $\frac{(7^4)^2 \times 7^{-2}}{7^4} = \frac{7^8 \times 7^{-2}}{7^4} = \frac{7^{8-2}}{7^4} = \frac{7^6}{7^4} = 7^{6-4} = 7^2 = 49$

2.3 Écriture scientifique

Définition 2 : Tout nombre décimal peut s'écrire de manière unique sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclus), et où n est un nombre entier relatif.

Exemple : $752\,000 = 7,52 \times 10^5$ $\quad$ $0,005\,1 = 5,1 \times 10^{-3}$

3 Racines carrées

3.1 Définition

Définition 3 : Soit a un nombre positif, il existe un unique nombre positif dont le carré est égal à a. Ce nombre est appelé racine carré de a et se note $\sqrt{a}$

Exemple : $\sqrt{9} = 3$ $\quad$ $\sqrt{25} = 5$ $\quad$ $\sqrt{100} = 10$

3.2 Propriétés

Propriété 1 : Pour tout nombre positif a, on a :

- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples : $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ et $\sqrt{4^2} = 4$

$\sqrt{900} = \sqrt{9 \times 100} = \sqrt{9} \times \sqrt{100} = 30$ et $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{48}{3} = \sqrt{\dfrac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$

Chapitre 2

Expressions littérales et équations

1 Enlever des parenthèses

Propriété 2 : Règle d'omission des parenthèses

- Si une parenthèse est précédée du signe $+$, alors on peut supprimer ces parenthèses en **conservant les signes** intérieurs à cette parenthèse
- Si une parenthèse est précédée du signe $-$, alors on peut supprimer ces parenthèses en **inversant les signes** intérieurs à cette parenthèse

Exemples : $2+(x+5)=2+x+5=x+7$ $\quad$ $2-(x+5)=2-x-5=-x-3$

$2+(x-5)=2+x-5=x-3$ $\quad$ $2-(x-5)=2-x+5=-x+7$

2 Développement d'une expression littérale

Propriété 3 : **Distributivité :**

Distributivité simple :

$k(a+b)=ka+kb$

$k(a-b)=ka-kb$

Distributivité double

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Identités remarquables :

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\quad$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $\quad$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Exemples :

- $2(x+5)=2x+10$
- $(x+2)(2x-5)=2x^2-5x+4x-10$
- $(5x+3)^2=(5x)^2+2\times 5x\times 3+3^2=25x^2+30x+9$

3 Factoriser une expression littérale

Propriété 4 : Factoriser signifie mettre en produit

- Facteur commun : $ka+kb=k(a+b)$ et $ka-kb=k(a-b)$
- Identités remarquables

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \qquad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Exemples :

- $3x+12=3(x+4)$ $\qquad$ $4x^2-3x=x(4x-3)$
- $(2x+1)(x-3)-(6x-5)(2x+1)=(2x+1)[(x-3)-(6x-5)]=(2x+1)(-5x+2)$
- $4x^2-20x+25=(2x)^2-2(2x)(5)+5^2=(2x-5)^2$
- $(x+2)^2-81=(x+2)^2-9^2=(x+2-9)(x+2+9)=(x-7)(x+11)$

4 Équations

4.1 Définition

Définition 4 : Une **équation** est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, représenté par une lettre, appelée inconnue de l'équation.

Une **solution** de cette équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.
Résoudre une équation, c'est en trouver toutes les solutions.

Exemple : -4 est une solution de l'équation $-3x-5=7$ car lorsque l'on remplace x par -4 dans l'équation, l'égalité est vérifiée : $(-3)(-4)-5=12-5=7$.
Par contre 2 n'est pas une solution de l'équation $-3x-5=7$ car, lorsqu'on remplace x par 2, l'égalité n'est pas vérifiée : $(-3)(2)-5=-6-5=-11\neq 7$

4.2 Règles de résolution

Propriété 5 : Règles sur les égalités

- **Règle n°1** : On ne change pas une équation en ajoutant (ou en retranchant) un même nombre de chaque côté de l'égalité.
- **Règle n°2** : On ne change pas une équation en multipliant (ou en divisant) par un même nombre **non nul** chaque côté de l'égalité.

Exemple : Résolvons l'équation : $-3x-5=7$

a) On utilise la règle n°1, en ajoutant 5 aux deux côté de l'égalité :
$-3x-5+5=7+5$ c'est à dire $-3x=12$

b) On utilise la règle n°2 en divisant par 3 chaque côté de l'égalité :
$\frac{3x}{3}=\frac{12}{3}$ c'est à dire $x=-4$

c) On conclut par : l'équation $-3x-5=7$ n'admet pour unique solution -4

4.3 Équation produit

Définition 5 : Un équation produit est une équation qui s'écrit sous la forme :

$$(ax+b)(cx+d)=0$$

Propriété 6 : Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins l'un des facteurs est nul. Ainsi "$AB = 0$" équivaut à dire "$A = 0$" ou "$B = 0$".

Exemple : Révolvons l'équation $(3x - 7)(2x + 5) = 0$

a) Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

b) On doit donc avoir :

- $3x - 7 = 0$ c'est à dire $3x = 7$ donc $x = \dfrac{7}{3}$ **ou**
- $2x + 5 = 0$ c'est à dire $2x = -5$ donc $x = -\dfrac{5}{2}$

c) L'équation $(3x - 7)(2x + 5) = 0$ admet deux solution $\dfrac{7}{3}$ et $-\dfrac{5}{2}$

Chapitre 3
Fonctions linéaires et affines

1 Fonction linéaire

1.1 Définition

Définition 6 : Soit a un nombre quelconque.

Si, à chaque nombre x, on peut associer son produit par a (c'est a dire $y = a \times x$, alors on définit la fonction linéaire de coefficient a, que l'on notera $f\ :\ x \mapsto ax$

Une **fonction linéaire** de coefficient a représente une **situation de proportionnalité** (dans laquelle le coefficient de proportionnalité est égal à a).

Pour calculer l'image d'un nombre, on le multiplie par a.

1.2 Représentation graphique

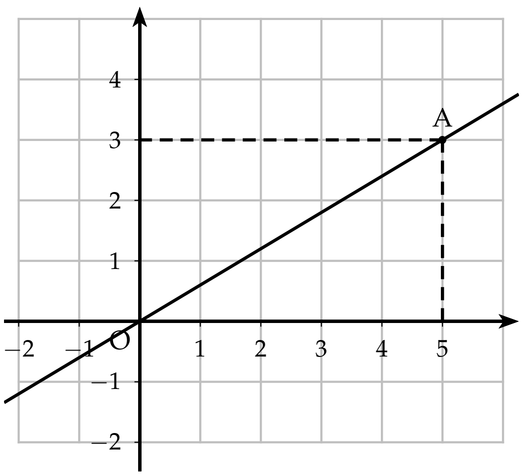
Propriété 7 : Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une **droite passant par l'origine** du repère

Ci-contre on a représenté la fonction linéaire f de coefficient 0,6, que l'on peut noter : $f\ :\ x \mapsto 0,6x$.

Pour tracer la droite, passant par l'origine du repère, qui représente cette fonction linéaire, il faut déterminer un second point.

Pour déterminer cet autre point, il suffit de déterminer une image. L'image de 5 par exemple : $f(5) = 0,6 \times 5 = 3$. La droite passe donc par le point A(5;3).

On trace alors la droite.



1.3 Déterminer le coefficient d'une fonction linéaire

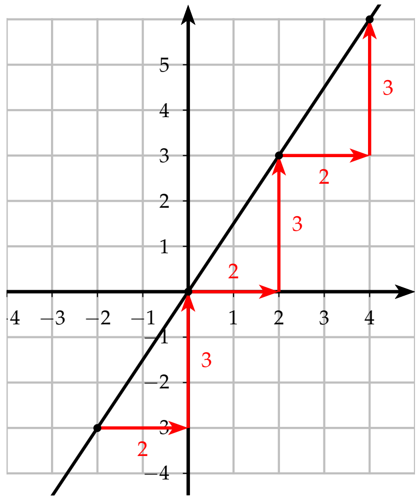
Propriété 8 : Pour déterminer le coefficient a d'une fonction linéaire, il suffit une image.

Si l'image de x_0 est y_0, on a alors : $a = \dfrac{y_0}{x_0}$

Exemple : Déterminer la fonction linéaire dont l'image de 4 est 3. Le coefficient de la fonction linéaire est alors : $a = \dfrac{3}{4} = 0,75$

La fonction linéaire f est donc : $f \ : \ x \mapsto 0,75x$

Propriété 9 : Pour déterminer le coefficient a d'une fonction linéaire graphiquement, il suffit de faire le rapport entre la variation des ordonnées et la variation des abscisses entre deux points de la droite.



Sur la représentation ci-contre, on a : $a = \dfrac{3}{2}$

1.4 Fonction linéaire et pourcentage

Propriété 10 : Pourcentage

- Prendre t % d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\frac{t}{100}$, c'est à dire lui appliquer la fonction linéaire $x \mapsto \frac{t}{100}x$
- Augmenter un nombre de t %, c'est multiplier ce nombre par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$, c'est à dire lui appliquer la fonction linéaire $x \mapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right) x$
- Diminuer un nombre de t %, c'est multiplier ce nombre par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$, c'est à dire lui appliquer la fonction linéaire $x \mapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right) x$

Exemples :

- Prendre 45 % d'un nombre x, c'est multiplier ce nombre x par $\frac{45}{100} = 0,45$. On peut associer à cette opération, la fonction linéaire : $x \mapsto 0,45x$
  45 % de 250 revient à faire $0,45 \times 250 = 112,5$
- Augmenter de 3 % un nombre x, c'est multiplier ce nombre x par $1 + \frac{3}{100} = 1,03$. On peut associer à cette opération, la fonction linéaire : $x \mapsto 1,03x$
  Un prix de 400 € augmente de 3 % revient à faire $1,03 \times 400 = 412$ €.
- Diminuer de 12 % un nombre x, c'est multiplier ce nombre x par $1 - \frac{12}{100} = 0,88$. On peut associer à cette opération, la fonction linéaire : $x \mapsto 0,88x$
  Un groupe de 1200 personnes diminue de 12 % revient à faire $0,88 \times 1200 = 1056$ personnes

2 Fonction affine

2.1 Définition

Définition 7 : Soient a et b deux nombre quelconques.

Si, à chaque nombre x, on peut associer le nombre $ax+b$, alors on détermine une fonction affine, que l'on notera : $f\ :\ x \mapsto ax+b$.

Remarque : Si $b=0$ la fonction f est alors une fonction linéaire.

2.2 Représentation graphique

Propriété 11 : Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite passant par le point $(0;b)$ (*ordonnée à l'origine*)

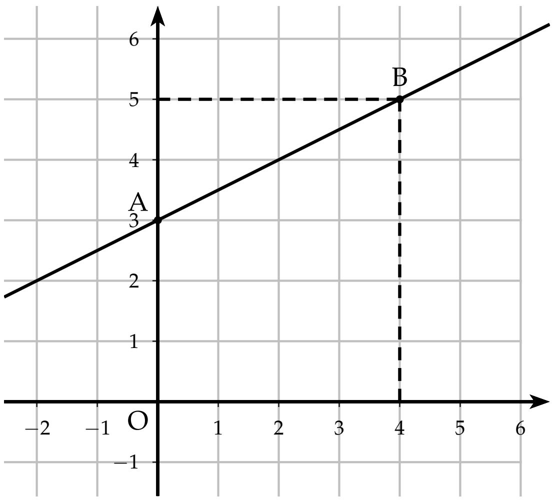
Ci-contre est représentée la fonction affine $f\ :\ x \mapsto 0,5x+3$

La droite passe donc par le point A(0;3)

Pour tracer la droite, il faut déterminer un autre point.

Pour déterminer cet autre point, il suffit de déterminer une image. L'image de 4 par exemple : $f(4) = 0,5\times 4+3 = 5$. La droite passe donc par le point B(4;5)

On trace alors la droite.



Chapitre 4

Systèmes linéaires

1 Définition

Définition 8 : Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y est un système qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad a, a', b, b', c, c' \text{ nombres réels}$$

Résoudre un tel système consiste à déterminer, s'il y en a, tous les couples $(x; y)$ qui sont solutions des deux équations

Exemple : le couple (4;1) est solution du système : $\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

en effet, on a : $2 \times 4 - 4 \times 1 = 4 \quad \text{et} \quad 4 + 3 \times 1 = 7$

2 Résolution par substitution

Reprenons le système de notre exemple : $\begin{cases} 2x - 4y = 4 & (1) \\ x + 3y = 7 & (2) \end{cases}$

- **Étape 1** : on exprime, grâce à l'une des équations, une inconnue en fonction de l'autre. Ici, il est facile d'exprimer x en fonction de y grâce à la deuxième équation.

$$\text{de (2)} \qquad x = 7 - 3y \quad (3)$$

- **Étape 2** On substitue x par $7 - 3y$ dans la première équation puis on résout cette équation d'inconnue y

$$\begin{aligned} \text{de (1)} \qquad 2(7-3y) - 4y &= 4 \\ 14 - 6y - 4y &= 4 \\ -10y &= -10 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

- **Étape 3** : On remplace y dans l'équation (3) : $x = 7 - 3y = 7 - 3 \times 1 = 4$
- **Étape 4** : On conclut : le système admet un unique couple solution (4;1)

2.1 Méthode par addition

Reprenons le même exemple.

- **Étape 1** : On cherche à multiplier les équations par des coefficients de façon à éliminer une inconnue. Pour éliminer x, on multiplie la première équation par 1 et la seconde par (-2). Pour éliminer y, on multiplie la première équation par 3 et la seconde par 4. On a alors :

$$\begin{cases} 2x-4y=4 & (\times 1) \\ x+3y=7 & (\times -2) \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} 2x-4y=4 & (\times 3) \\ x+3y=7 & (\times 4) \end{cases}$$

- **Étape 2** : On obtient alors :

$$\begin{cases} 2x-4y=4 \\ -2x-6y=-14 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} 6x-12y=12 \\ 4x+12y=28 \end{cases}$$

- **Étape 3** : On additionne termes à termes les deux lignes de ces systèmes et on détermine x et y

$$\begin{cases} -10y=-10 \\ -y=1 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} 10x=40 \\ x=4 \end{cases}$$

- **Étape 4** : On conclut : le système admet un unique couple solution (4 ;1)

3 Résolution graphique

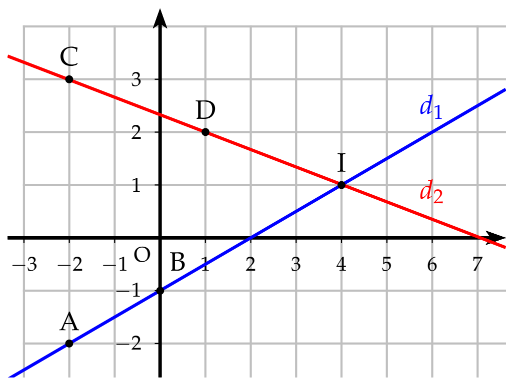
- On commence par isoler y dans les deux équations, c'est à dire que l'on les "x" à droite. On obtient alors :

$$\begin{cases} 2x-4y=4 \\ x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y=4-2x \\ 3y=7-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x-1 & d_1 \\ y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3} & d_2 \end{cases}$$

- Dans un repère, on trace les deux droites d_1 et d_2 correspondantes à ces deux équations.

On trace alors la droite d_1 : $\frac{1}{2}x-1$.
On détermine deux points avec deux valeurs de x :
$x=-2 \Rightarrow y=-2$ et $x=0 \Rightarrow y=1$.
On obtient les points A$(-2;-2)$ et B$(0;1)$

On trace alors la droite d_2 : $-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.
On détermine deux points avec deux valeurs de x :
$x=-2 \Rightarrow y=3$ et $x=1 \Rightarrow y=2$.
On obtient les points C$(-2;3)$ et D$(1;2)$



- Le couple solution est alors les coordonnées du point d'intersection I entre d_1 et d_2. On retrouve alors le couple (4 ;1).

Chapitre 5

Problème

1 Mise en équation

On peut diviser la mise en équation en quatre parties.

- **Compréhension de l'énoncé.** Visualiser, si besoin, le problème à l'aide de dessins, croquis, etc ... La visualisation rend la traduction mathématique plus facile.
- **Choix de l'inconnue ou des inconnues.** Une fois l'énoncé compris, déterminer l'inconnue ou les inconnues en quelques mots.
- **Mise en équation.** Traduire l'énoncé avec l'inconnue ou les inconnues. Attention à pas projeter une idée préconçue qui n'existe pas dans le texte. Il faut s'en tenir uniquement à l'énoncé rien que l'énoncé.
- **Résolution.** Ne pas hésiter à simplifier l'équation ou les équations avant de résoudre. On conclut par une phrase en français.

2 Exemple

Hervé et Éric sortent d'une boulangerie
Hervé : « J'ai payé 9,50 € pour 4 croissants et 6 baguettes »
Éric : « J'ai payé 5 € pour 3 croissants et 2 baguettes ».
Quel est le prix du croissant et de la baguette ?

La traduction du problème est immédiate. Attention cependant à ne pas oublier de définir les inconnues.

Soit x : prix en euro d'un croissant
Soit y : prix en euro d'une baguette

Le problème se résume au système suivant :

$$\begin{cases} 4x + 6y = 9,5 & (\times 1) \\ 3x + 2y = 5 & (\times -3) \end{cases}$$

Éliminons x par la méthode d'addition :

$$\begin{array}{r} 4x + 6y = 9,5 \\ -9x - 6y = -15 \\ \hline -5x + 0y = -5,5 \\ x = \dfrac{-5,5}{-5} = 1,1 \end{array}$$

On remplace $x = 1,1$ dans la 2[e] équation

$$\begin{aligned} 3 \times 1,1 + 2y &= 5 \\ 2y &= 5 - 3,3 \\ 2y &= 1,7 \\ y &= 0,85 \end{aligned}$$

Le prix du croissant est de 1,10 € et le prix de la baguette est de 0,85 €.

3 Résolution arithmétique (sans équation)

Deux nombres entiers naturels ont pour somme $S = 51$ et pour différence $D = 21$. Quels sont ces deux nombres ?

Soit n_1 et n_2 les deux nombres cherchés

On part d'une solution médiane, c'est à dire que l'on détermine le milieu m des deux nombres en utilisant leur somme. On trouve alors :

$$m = \frac{51}{2} = 25,5$$

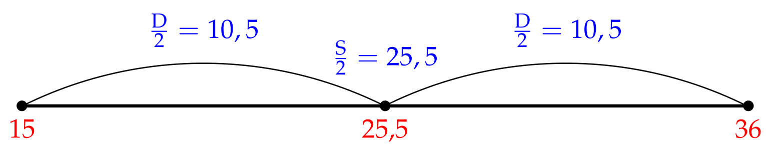
On s'intéresse à leur différence en sachant que leur milieu est de $25,5$, il faut donc retirer et ajouter la moitié de leur différence pour obtenir les deux nombres :

$$\frac{21}{2} = 10,5$$

les deux nombres cherchés sont donc :

$$n_1 = 25,5 - 10,5 = 15 \quad \text{et} \quad n_2 = 25,5 + 10,5 = 36$$

On peut résumé le problème par le graphique suivant :



Configuration de Pythagore

1 Pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

Théorème 6 : Théorème de Pythagore

Dans un triangle ABC rectangle en A, le carré de l'hypoténuse [BC] est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. On a alors : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

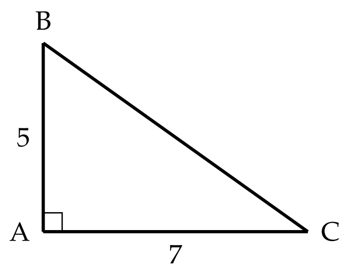
Exemples :

- ABC est un triangle rectangle en A, avec $AB = 5$ et $AC = 7$

  D'après le théorème de Pythagore :

  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$

  $BC = \sqrt{74} \simeq 8,6$

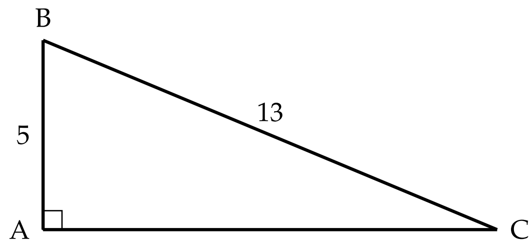


- ABC est un triangle rectangle en A, avec $BC = 13$ et $AB = 5$

  D'après le théorème de Pythagore :

  $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

  $AC = \sqrt{144} = 12$



2 Pour montrer qu'un triangle est rectangle

Théorème 7 : Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle ABC , le carré du côté le plus grand [BC] est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle ABC est rectangle en A.

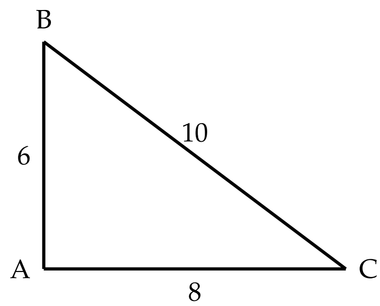
Exemple :

- ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$

  On calcule : $BC^2 = 10^2 = 100$ et

  $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

  Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A



3 Pour montrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Théorème 8 : Contraposée du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle ABC, le carré du plus grand côté [BC] n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle. On a : $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$

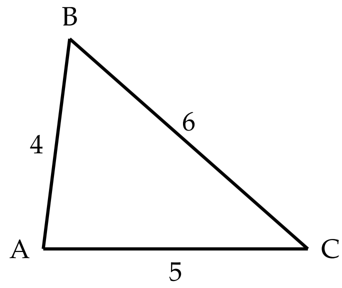
Exemple :

- ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 6$

  On calcule : $BC^2 = 6^2 = 36$ et

  $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$

  Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.



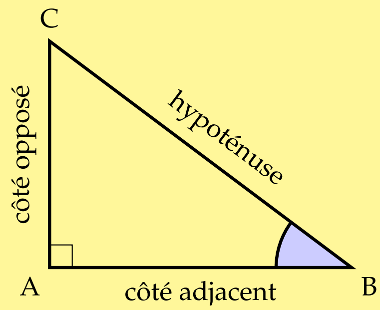
4 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Définition 9 : Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit les rapports suivants (qui ne dépendent que de la mesure des angles) :

$$\sin \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

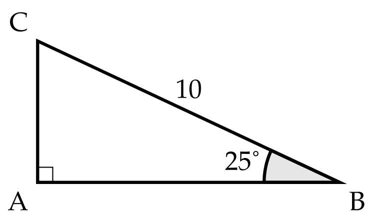
$$\tan \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$



Exemple : On donne le triangle ABC rectangle en A ci-dessous. On donne $BC = 10$ et $\widehat{ABC} = 25^\circ$. Calculer AC et AB.

$$\sin 25^\circ = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow AC = BC \sin 25^\circ \simeq 4,22$$

$$\cos 25^\circ = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow AB = BC \cos 25^\circ \simeq 9,06$$



Chapitre 7

Configuration de Thalès

1 Pour calculer la longueur d'un côté

Théorème 9 : Théorème de Thalès

Soient deux droites (AB) et (A'B') sécante en O et deux droites parallèles (AA') et (BB'), alors les longueurs des côtés des triangles OA'B' et OAB sont proportionnelles. On a :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$$

Exemple :

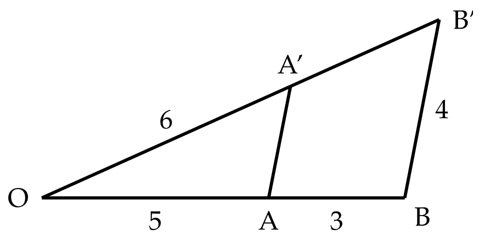
- OBB' est un triangle, A est un point de [OB] et les droites (AA') et (BB') sont parallèles.

  On donne $OA = 5$, $AB = 3$, $OA' = 6$ et $BB' = 4$

  D'après le théorème de Thalès : $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$

  $OB' = \frac{OA' \times OB}{OA} = \frac{6 \times (5+3)}{5} = 9,6$

  $AA' = \frac{OA \times BB'}{OB} = \frac{5 \times 4}{(5+3)} = 2,5$



2 Pour démontrer que deux droites sont parallèles

Théorème 10 : Réciproque du théorème de Thalès

Les points O, A, B d'une part et O, A', B' d'autre part sont alignés dans cet ordre.

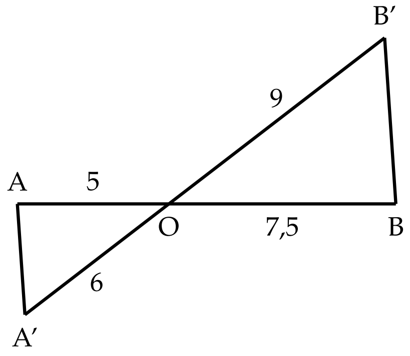
Si $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$ alors les droites (AA') et (BB') sont parallèles.

Exemple :

- Les points A, O, B et A′, O, B′ sont alignés dans cet ordre. De plus : $OA = 5, OB = 7,5, OA' = 6, OB' = 9$

  On calcule : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{5}{7,5} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{OA'}{OB'} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$

  $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA'}{OB'}$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AA′) et (BB′) sont parallèles



3 Pour démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

Théorème 11 : Contraposée du théorème de Thalès

Soient deux droites (AB) et (A′B′) sécantes en O. Si $\dfrac{OA}{OB} \neq \dfrac{OA'}{OB'}$ alors les droites (AA′) et (BB′) ne sont pas parallèles.

Exemple :

- OBB′ est un triangle, A est sur [OB] et A′ sur [OB′].
  $OA = 5, AB = 3, OA' = 6$ et $A'B' = 3$

  On calcule : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{5}{5+3} = \dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{OA'}{OB'} = \dfrac{6}{6+3} = \dfrac{2}{3}$

  On a : $\dfrac{OA}{OB} \neq \dfrac{OA'}{OB'}$, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (AA′) et (BB′) ne sont pas parallèles.