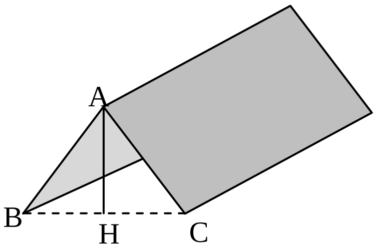
Chapitre 2 ~ Fonctions (partie 1)

I – Rappels et approfondissements

Exemple-exercice pour tout le paragraphe :



Un élève dispose d'une feuille carrée de 30 cm de côté, pliée en deux. On pose x = AH et on considère que le triangle ABC est isocèle.

Le but du problème est de déterminer pour quelle hauteur x le volume du prisme droit est maximal.

- *À quel intervalle x appartient-il ?*
- *Déterminer AB puis BH, en déduire $\mathscr{A}_{ABC}$ en fonction de x.*
- *Déterminer le volume du prisme droit en fonction de x. On notera ce volume $f(x)$.*

Solution :

- Puisque la feuille est pliée en deux, on a AB + AC = 30 et AB = AC, donc AB = 15 cm. On en déduit que AH $\in [0 ; 15]$.
- On a déjà AB = 15 cm. Par Pythagore dans le triangle rectangle ABH, on trouve BH = $\sqrt{15^2 - x^2} = \sqrt{225 - x^2}$. Enfin, on a :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{2 \times BH \times AH}{2} = BH \times AH = x\sqrt{225 - x^2}\ \text{cm}^2.$$

- Le volume du prisme droit est obtenu en multipliant l'aire de la base ABC par la hauteur du prisme (30 cm car la feuille est carré) : $\mathscr{V} = 3 \times \mathscr{A}_{ABC} = 3x\sqrt{225 - x^2}$ cm^3. On note donc $\boxed{f(x) = 3x\sqrt{225 - x^2}\,.}$

1. Rappels

Définition

Une fonction est une « machine » qui sert à transformer les nombres.

Exemples : Au collège, les fonctions affines (donc linéaires et constantes aussi) ont été vues. Soit alors $f : x \mapsto 2\pi x$ une fonction affine (même linéaire).
Quelles sont les images de 0 ? 1 ? – 2,3 ? π ? Comment les note-t-on ? Que calcule cette « machine » ??

	Rappels : 8, 9, 10 p. 62	Exercices : 13 p. 63

2. Définitions

Définitions

- *** f est la fonction définie par $f(x) = 3x\,(225 - x^2)$ (on met x dans la machine ; $3x\sqrt{225 - x^2}$ en ressort).**
- *** [0 ; 15] est l'ensemble de définition de la fonction f, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre le nombre x. On note $\mathscr{D}_f$ = [0 ; 15].**
- *** le nombre $3x\sqrt{225 - x^2}$ est l'image du nombre x par la fonction f.**

3. Représentation graphique

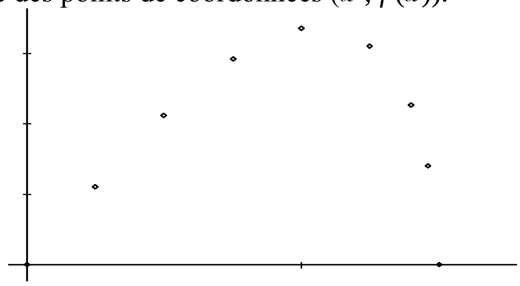
→ fiche « Tracer des courbes »

Toute fonction peut se représenter graphiquement sur son intervalle de définition par une courbe, généralement notée $\mathscr{C}_f$, d'équation $y = f(x)$: c'est donc l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$.

Tableau de valeurs ↓ Représentation graphique →

x	0	2,5	5	7,5	10
$f(x)$	0	110,9	212,1	292,3	335,4

x	12,5	14	14,7	15
$f(x)$	310,9	226,2	131,6	0



ATTENTION

NE JAMAIS OUBLIER :
- repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) si possible → voir chapitre 3 pour les « vecteurs » ;
- axes gradués, nommés, orientés ;
- nom ou équation de la courbe : $\mathscr{C}_f$ ou $y = f(x)$ ou $y = 3x\sqrt{225 - x^2}$.

→ Compléter le graphique en conséquence, sans oublier le tracé de la fonction **au crayon**…

Remarques

- Entre 12,5 et 15, on perd plus de 310 unités en ordonnées ! La courbe sera donc imprécise : il faut rajouter des points entre.
- Ce graphique permet de conclure quant à la longueur x nécessaire pour le volume maximal → ≈ 10 cm.

Exercice : Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

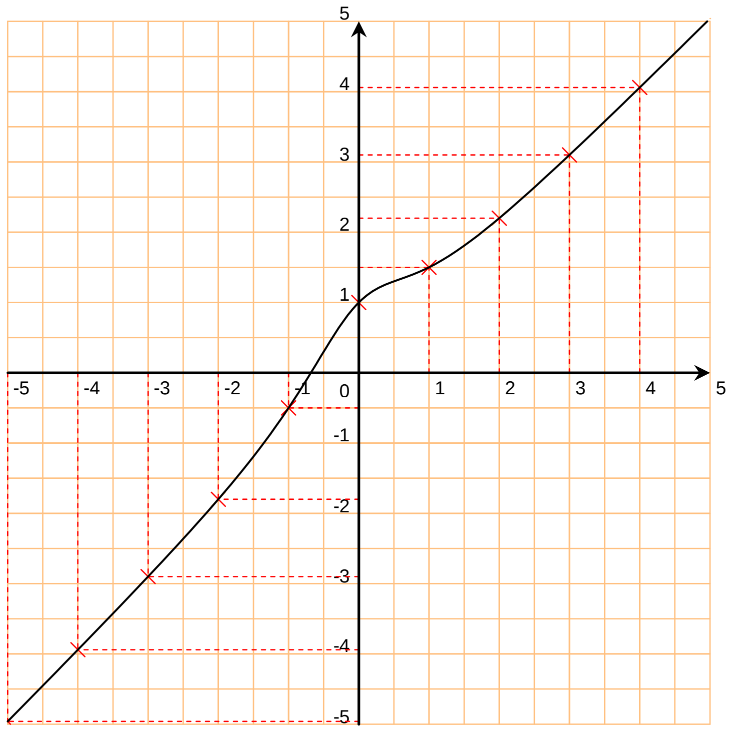
→ Voir fichier « 02 - TI et pixels.xls »

Solution :

On commence par construire un tableau de valeurs :

x	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	– 4,96	– 3,94	– 2,90	– 1,80	– 0,50	1	1,50	2,20	3,10	4,06	5,04

L'intervalle n'étant pas donné, on ne peut pas représenter cette fonction sur tout $\mathbb{R}$, on choisit donc de se restreindre à un intervalle choisi (ne pas oublier de rajouter le repère, c'est le seul élément manquant ici…) :



	En classe : **23 p. 64**	**Exercices :** **24, 25 p. 63**

4. *Images et antécédents*

Définitions

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.

- **Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x)$ n'est pas une fonction, mais un nombre appelé <u>image de x par la fonction f</u>. Un nombre possède une unique image par une fonction.**
- **Un <u>antécédent du nombre t par la fonction f</u> est un nombre qui admet t pour image.** **Un nombre peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.**

Remarque

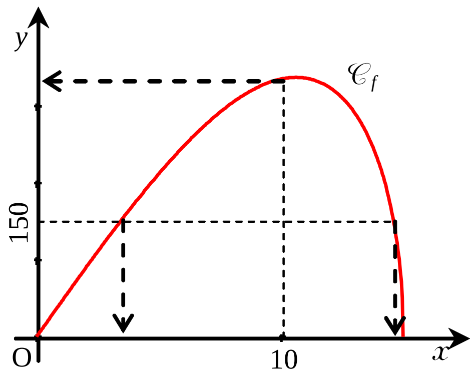
Trouver les antécédents du nombre t par la fonction f revient à résoudre l'équation $f(x) = t$.

Exemples : Dans notre exemple,

** image :* $f(10) = 3 \times 10 \times \sqrt{225 - 10^2} = 30\sqrt{125} = 30\sqrt{25 \times 5} = 30 \times 5\sqrt{5} = 150\sqrt{5} \approx 335{,}4$.

** antécédent :* *on observe graphiquement que le nombre 15 admet deux antécédents* x_1 *et* x_2 *:*

$$x_1 \approx 3{,}4 \text{ et } x_2 \approx 14{,}6 :$$



	En classe : 1, 2 p. 61 + 11 p. 62	Exercices : 3 p. 61 + 10 p. 62

5. Détermination de l'ensemble de définition

De temps en temps, l'intervalle de définition d'une fonction ne sera pas précisé. Il faudra alors le déterminer manuellement en utilisant nos connaissances. Par exemple,

Exercice : quel est l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$?

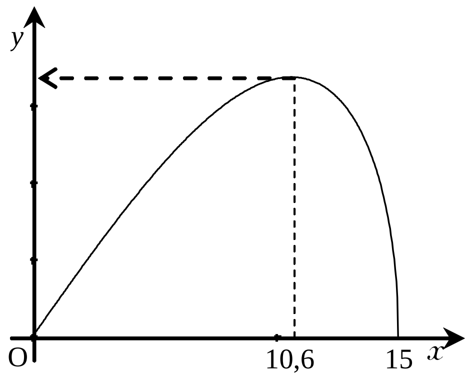
Solution :
Les conditions sont : $x + 1 \geqslant 0$ (car ce qui est sous une racine ne peut être strictement négatif) et $x \neq 0$ (car le dénominateur d'une fraction ne peut être nul). On a donc :

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

D'où $\mathscr{D}_f = [-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

II – Variations d'une fonction

Ce paragraphe reprendra encore le graphique de l'exemple précédent :



1. Variations

Définition

Soit f une fonction définie sur son intervalle de définition $\mathscr{D}_f$, et a, $b \in \mathscr{D}_f$. Pour tous x_1, $x_2 \in \mathscr{D}_f$ tels que $x_1 < x_2$, on dit que :

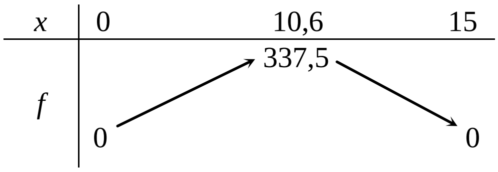
- f est <u>strictement croissante</u> sur [a ; b] si $f(x_1) < f(x_2)$;
- f est <u>strictement décroissante</u> sur [a ; b] si $f(x_1) > f(x_2)$;
- f est <u>croissante</u> sur [a ; b] si $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
- f est <u>décroissante</u> sur [a ; b] si $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;
- f est <u>constante</u> sur [a ; b] si $f(x_1) = f(x_2)$.

Remarque

En gros, f est croissante là où ça « monte » et décroissante là où ça « descend ». Lorsque la courbe n'est pas « plate », on peut ajouter l'adverbe « strictement »…

Exemples : Notre fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 10,6] et strictement décroissante sur l'intervalle [10,6 ; 15].

Chaque étude de variations débouche systématiquement sur un « **tableau de variations** » :

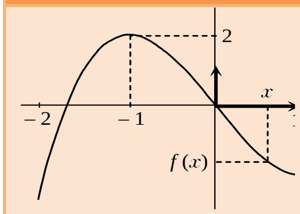
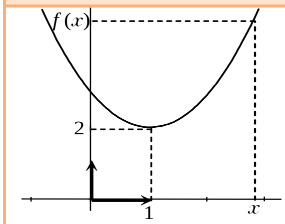


Remarque

Pour une fonction qui est constante sur un intervalle, on utilise simplement une flèche horizontale : →.

« 02 - EXOS - variations 1.doc » « 02 - EXOS - variations 2.doc » (pour les + rapides)	En classe : 41, 42 p. 66	Exercices : 43, 44, 47 p. 67

2. Extrema

COURBE	OBSERVATION DE LA COURBE	TRADUCTION MATHÉMATIQUE	PROPRIÉTÉ DE LA FONCTION
	Pour $x \in [-2 ; 1]$, la plus grande valeur que prend $f(x)$ est … . Cette valeur est obtenue pour $x =$ …	Pour tout x tel que : $-2 < x < 1$. On a : $f(x)$ ..... $f(-1)$.	On dit que la fonction f admet un **maximum de 2 en $x = -1$ sur [– 2 ; 1]**.
	Pour $x \in [-1 ; 3]$, la plus petite valeur que prend $f(x)$ est … . Cette valeur est obtenue pour $x =$ …	Pour tout x tel que :	On dit que la fonction f admet un **minimum de 2 en $x = 1$ sur [– 1 ; 3]**.

	En classe : 48, 49, 50 p. 67	Exercices : 51, 52, 53, 54 p. 67

III – Résolutions graphiques (équations, inéquations)

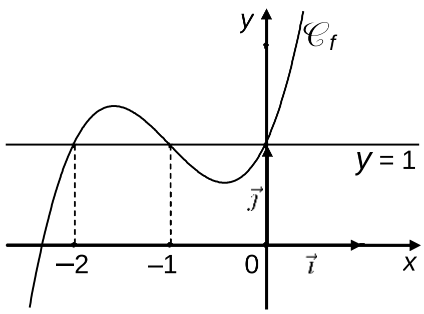
Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
1) Résoudre graphiquement $f(x) = 1$.
2) Résoudre graphiquement $f(x) > 1$.

Solution :

Faisons un graphique pour mieux voir les choses…

1) Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = 1$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$: $\mathscr{S} = \{-2 ; -1 ; 0\}$.

2) Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de la droite d'équation $y = 1$: $\mathscr{S} =]-2 ; -1[\cup]0 ; +\infty[$.



« 02 - EXOS - résolution graphique.doc »	En classe : 34 p. 65	Exercices : 35, 38 p. 65