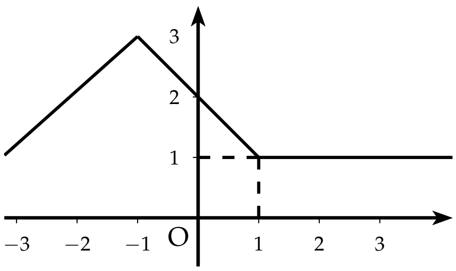
Fonction. Résolution graphique
Fonction affine

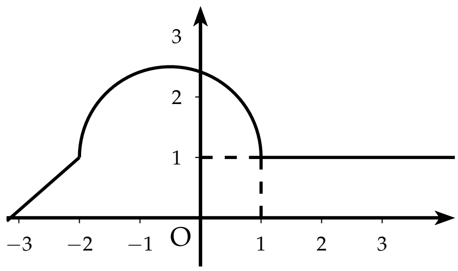
Représentation d'une fonction

EXERCICE 1

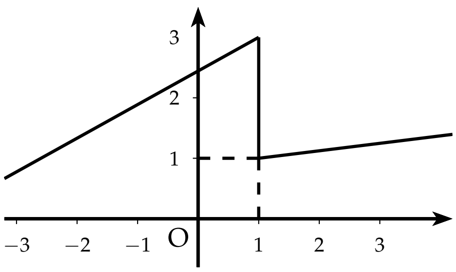
Parmi les courbe suivantes, quelles sont celles qui ne sont pas des représentations de fonction ? Expliquez pourquoi.



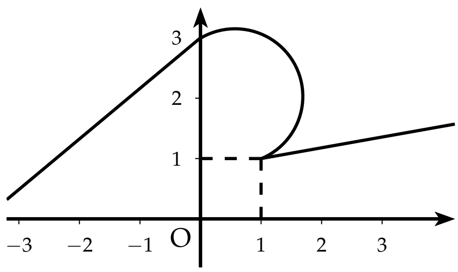
Fonction 1



Fonction 3



Fonction 2



Fonction 4

Images d'une fonction

EXERCICE 2

1) f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$

   Calculer les images par f des réels : -2, 0, 1, $\sqrt{2}$.

2) g est la fonction définie par : $g(x) = x^2 + x - 5$

   Calculer les image par g des réels 4, 6, -5, 0.

EXERCICE 3

f est une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique. Traduire par des égalité du type $y = f(x)$ chacune des phrases suivantes :

1) $\mathscr{C}_f$ passe par le point $(-2;5)$.
2) $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -1.
3) $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses respectives -2 et 3.

Ensemble de définition

Exercice 4

Déterminer les ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x^2 + 1$
2) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + 3x$
3) $f(x) = 2x + \dfrac{7}{2}$
4) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
5) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$
6) $f(x) = x\sqrt{2} + 1$

Résolution graphique

Exercice 5

Tracer à 'aide de votre calculatrice la fonction définie sur $[-2; 2.5]$ par :
$f(x) = x^3 - 3x - 2$

Fenêtre : $x \in [-2; 2,5]$, $y \in [-5; 7]$ et comme graduation 1 sur chaque axe

A partir de $\mathscr{C}_f$, ou de votre calculatrice :

1) Lire les images par f de : -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2,5
2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3) Résoudre les équations suivante : $f(x) = 0$ et $f(x) = -2$.
Donner le mode opératoire de la lecture des solutions de ces équations
4) Résoudre les inéquations suivantes : $f(x) \geqslant -2$ et $f(x) \leqslant 0$ puis $f(x) < 0$.
Donner le mode opératoire de la lecture des solutions de ces inéquations.
5) Remplir le tableau de signe de la fonction f sur [2 ;2,5]
6) D'une façon générale, quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$; m étant un paramètre que l'on fait varier sur $\mathbb{R}$

Exercice 6

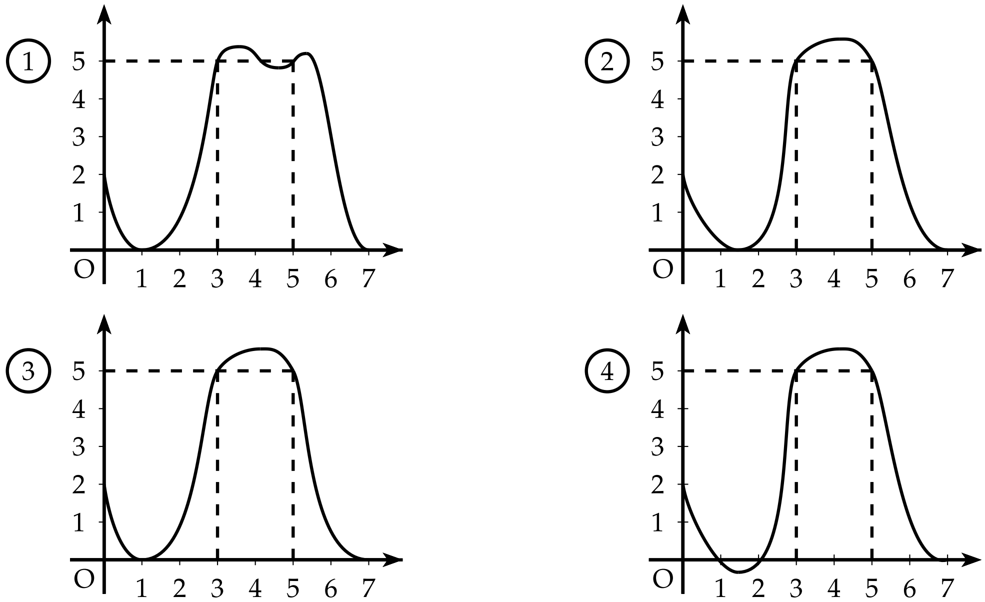
Soit la fonction définie sur $[-5; 5]$ par : $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 2x + 2}$

1) Tracer sur votre calculatrice la fonction f dans la fenêtre suivante :
$x \in [-5; 5]$, $y \in [-3; 7]$ et grad = 1 sur les deux axes.
2) Déterminer graphiquement : $f(-2), f(0), f(1)$.
3) A partir de la représentation, dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-5; 5]$.
4) Déterminer le maximum M et le minimum m de la fonction f sur $[-5; 5]$. Pour quelles valeurs sont-il atteint ?
5) Résoudre graphiquement :
a) $f(x) = 4$ b) $f(x) \geqslant 2$ c) $f(x) = x + 1$

Exercice 7

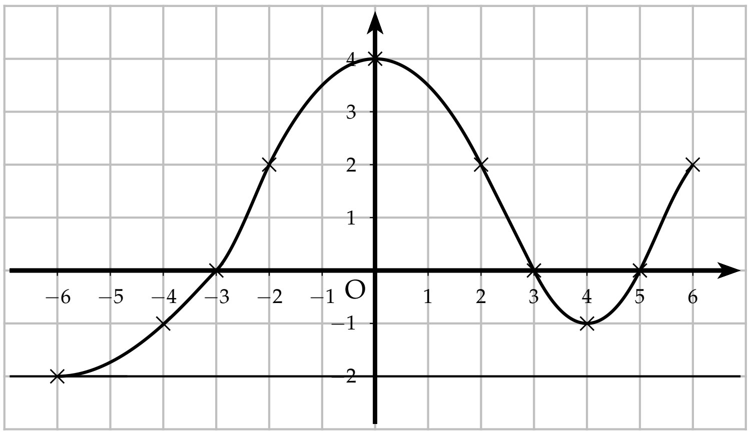
Parmi les courbes suivantes, retrouver la courbe représentative de la fonction f, sachant que :

- 1 a pour image 0 par f.
- 0 a pour image 2 par f.
- 5 est l'image de 3 et 5 par f.
- Si $x \in [3;5]$, alors $f(x) \geqslant 5$.
- L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.



EXERCICE 8

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-6, 6]$ par le graphique suivant :



1) Quel est le minimum de f sur $[-3;6]$?
2) Quel est le minimum de f sur $[-6;6]$?
3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$
4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$
5) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant -1$
6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 2$

Tracer une courbe

EXERCICE 9

Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f à partir de son tableau de variation et des renseignements donnés.

$D_f = \mathbb{R}$; $f(-4) = -3$; $f(4) = 2$ et pour tout $x > 2$, $f(x) > 0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	

EXERCICE 10

Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f à partir de son tableau de variation et des renseignements donnés.

$D_f = \mathbb{R}$; $f(-1) = 0$; $f(-3) = 2$ et pour tout $x < -3$, $f(x) < 3$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\rightarrow$	3

EXERCICE 11

Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f à partir de son tableau de variation et des renseignements donnés.

$D_f = \mathbb{R}$; $f(0) = 1$; $f(6) = -1$ et pour tout x , $f(x) > -2$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	

Tableau de variation

EXERCICE 12

Voici le tableau de variation d'une fonction f.

x	-2		0		$0{,}5$		3		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	

1) a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
   b) Donner $f(0)$, $f(-2)$, $f(0,5)$.
2) La fonction f est-elle :
   a) croissante sur $[-2;2]$? sur $[0;1]$?
   b) décroissante sur $[3,10]$? sur $[-2;1]$?
3) Tracer une courbe $\mathscr{C}_f$ susceptible de représenter la fonction f.

Exercice 13

f est une fonction définie sur $[-4;4]$ dont voici le tableau de variation :

x	-4		-1		4
$f(x)$	-5	↗	2	↘	-2

En exploitant les informations données, justifier, pour chacune des propositions, si elle est vraie ou fausse.

1) Il existe un nombre réel de l'intervalle $[-4,4]$ qui a une image strictement négative par f.
2) Tous les nombres réels de l'intervalle $[-4,4]$ ont une image négative par f.
3) Tous les nombres réels de l'intervalle $[-4,4]$ ont une image strictement inférieure à 3 par f.
4) Il existe un nombre réel de l'intervalle $[-4,4]$ qui a une image supérieure à 3 par f.

Exercice 14

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-8;8]$.

x	-8		-2		1		8
$f(x)$	0	↗	4	↘	-3	↗	1

Pour chaque affirmation, dire qi elle est vraie ou fausse ou si l'on ne peut décider. Dans le dernier cas dire pourquoi.

1) La fonction f est croissante sur $[-8;8]$.
2) La fonction f est décroissante sur $[-8;1]$.
3) La fonction f est décroissante sur $[0;1]$.
4) La fonction f est croissante sur $[-8;-1]$.

5) $f(-4) \leqslant 4$.
6) $f(-7) = 1$.
7) $f(1) = -3$.
8) $f(0) = 5$.
9) $f(-7) \leqslant f(-3)$.
10) $f(-1) \leqslant f(0)$.
11) $f(4) \leqslant f(7)$.
12) $f(-5) \leqslant f(0)$.
13) $f(-3) = f(-1)$.

EXERCICE 15

Expliquer pourquoi les renseignements donnés et le tableau de variation sont contradictoires.

$D_f = \mathbb{R}\,;\, f(-2) = 4\,;\, f(4) = 0.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

EXERCICE 16

Expliquer pourquoi les renseignements donnés et le tableau de variation sont contradictoires.

$D_f = \mathbb{R}\,;\, f(-2) = 0\,;\, f(4) = -2\,;\, f(5) = 1.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

EXERCICE 17

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		2		8		15		22		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	-3	$\searrow$	-10	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	

1) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2) L'inéquation $f(x) \geqslant 2$ a-t-elle des solutions ?

Proportionnalité

EXERCICE 18

Dans un immeuble, les charges sont réparties proportionnellement aux surfaces des logements.
L'immeuble comporte trois studios de 35 m^2 chacun, deux F2 de 60 m^2 chacun, deux F3 de 75 m^2 chacun et trois F4 de 100 m^2 chacun.
Le montant annuel des charges est de 19 125 euros. Calculer le montant annuel (arrondi au centième près) des charges pour chaque type d'appartement.

EXERCICE 19

Un héritage estimé à 2 100 000 € est composé d'une maison, d'un terrain et d'une somme d'argent en dépôt dans une banque.
La valeur du terrain représente 80 % de celle de la maison.
À eux deux, la maison et le terrain représentent une fois et demi la valeur de la somme d'argent en dépôt à la banque.
Un testament stipule que cet héritage doit entièrement être réparti entre trois personnes, A, B et C, proportionnellement au nombre de parts qui leur sont respectivement attribuées 28 ; 24 et 18.

1) Calculer le montant de la somme d'argent, la valeur du terrain et la valeur de la maison.
2) Calculer l'héritage de chacun.
3) Proposer une solution de partage au notaire chargé de liquider l'héritage.

EXERCICE 20

Avec un plateau de 42 dents et un petit pignon de 18 dents, Janie parcourt 7 m à chaque tour de pédales. Combien parcourt-elle avec un plateau de 52 dents et un pignon de 12 dents ?

Détermination d'une fonction affine

EXERCICE 21

Déterminer l'expression des fonctions affines à l'aide des renseignements proposés :

1) $f(-1) = 4$ et $f(1) = 4$
2) f est linéaire et $f(2) = 6$
3) $f(3) = 6$ et $f(6) = -3$
4) $f(-1) = -3$ et $f(4) = 9$
5) $f(-2) = -6$ et $f(4) = 3$

EXERCICE 22

Trouver la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points A et B donnés.

1) $\mathrm{A}(0;4)$ et $\mathrm{B}(2;0)$
2) $\mathrm{A}(-2;1)$ et $\mathrm{B}(4;-2)$
3) $\mathrm{A}(7;1)$ et $\mathrm{B}(3;-7)$
4) $\mathrm{A}(1;3)$ et $\mathrm{B}(-7;3)$

Variation d'une fonction affine

EXERCICE 23

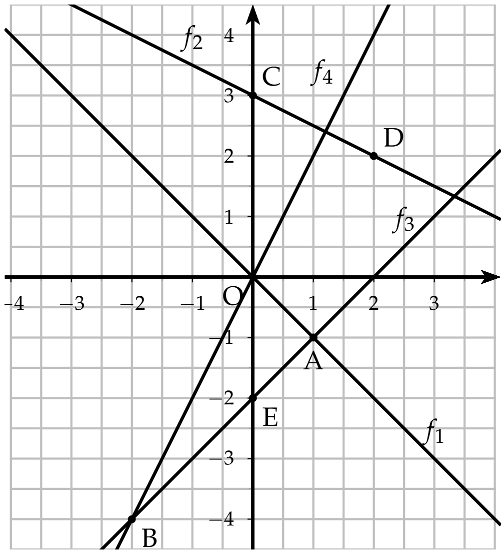
Indiquer le sens de variation de chacune des fonction affines suivantes :

1) $f(x) = 7 - x$
2) $f(x) = \dfrac{-2x+3}{5}$
3) $f(x) = (\sqrt{2}-1)x$
4) $f(x) = -\dfrac{1}{3}(2-x)$
5) $f(x) = \sqrt{3}(x-1)$
6) $f(x) = \dfrac{x}{1-\sqrt{2}}$

Expression des fonctions affines représentées

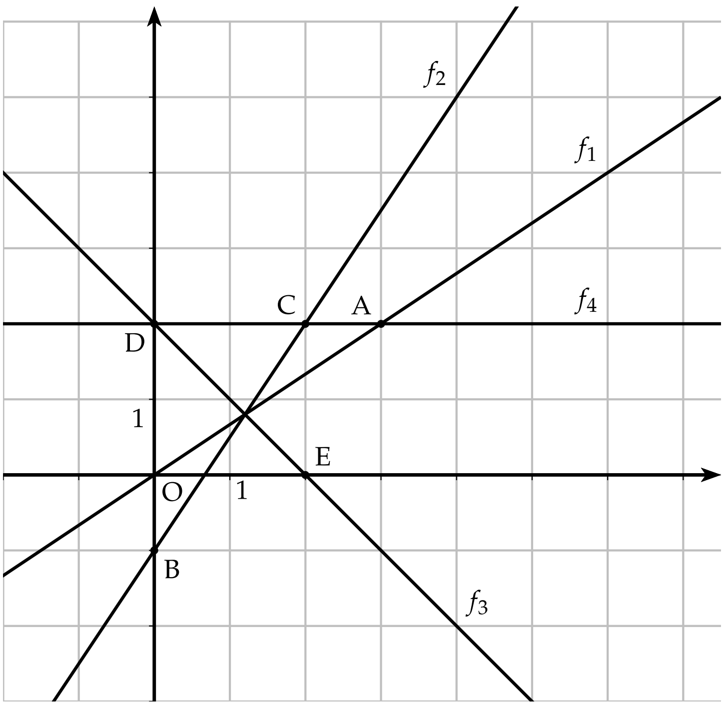
EXERCICE 24

Déterminer les expressions des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 représentée ci-dessous.



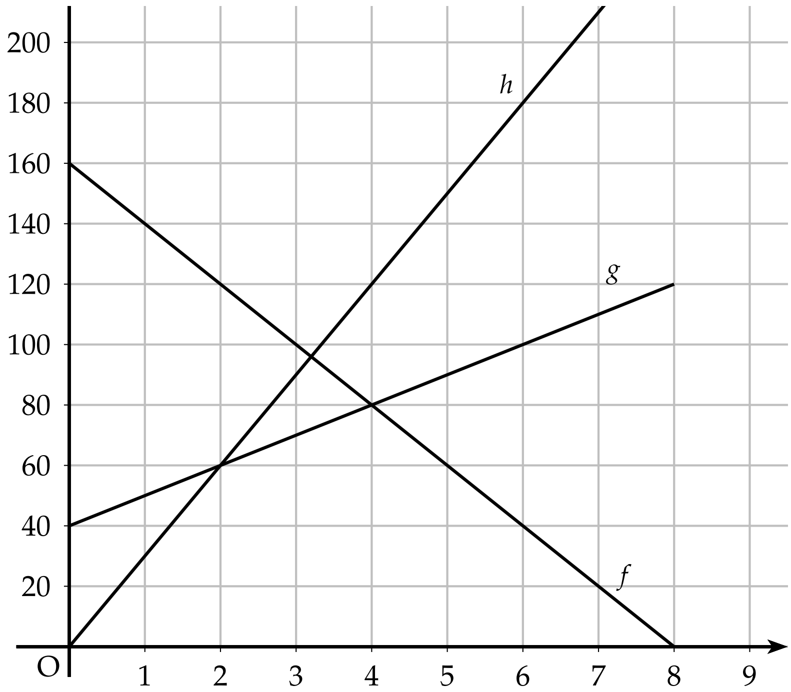
EXERCICE 25

Voici quatre droites tracées dans un repère orthonormal. Donner l'expression de chacune des fonctions affines f_1, f_2, f_3 et f_4 associées à ces 4 droites.



EXERCICE 26

Déterminer les expressions des fonctions affines f, g, et h sur les représentations suivantes



Affine ou non

EXERCICE 27

Préciser si la fonction f proposée peut-être affine. Justifier votre réponse.

1) $f(0) = 5\,;\ f(3) = 6\,;\ f(6) = 7$
2) $f(1,2) = 2,4\,;\ f(-2) = -4\,;\ f(3) = 6$
3) $f(8) = 13\,;\ f(13) = 21\,;\ f(21) = 34$
4) $f(2) = -1\,;\ f(-1) = 2\,;\ \dfrac{f(4) - f(1)}{3} = -1$

Optimisation

EXERCICE 28

On propose à un représentant 3 offres d'embauches :

- Société A : Un salaire mensuel fixe de 1 000 € augmenté de 15 % du montant des ventes effectuées.
- Société B : Un salaire mensuel fixe de 600 € augmenté de 25 % du montant des ventes effectuées.
- Société C : un salaire de 1 150 € non indexé sur le montant des ventes.

1) On note x le montant des ventes pendant un mois et $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ le salaire proposé respectivement par les sociétés A, B et C. Exprimer en fonction de x, le salaire réalisé par ce représentant s'il choisit :

   a) La société A　　b) La société B　　c) La société C

2) Représenter dans un repère orthogonal les fonctions f, g et h.

   On prendra 1cm pour 500 € sur l'axe des abscisses et 1cm pour 200 € sur l'axe des ordonnées.

3) En utilisant le graphique déterminer suivant le montant des ventes réalisées la société la plus intéressante.
4) Retrouver ces résultats par le calcul.
5) Le représentant pense réaliser 3500 € de ventes rapidement. Que lui conseilleriez vous ?

EXERCICE 29

Un client s'adresse à une agence de location de camping-car pour organiser ses vacances. Trois formules lui sont proposées :

- Formule 1 : forfait hebdomadaire de 850 €, kilométrage illimité.
- Formule 2 : forfait hebdomadaire de 700 €, avec 2 000 kilomètres inclus et 0,25 € par kilomètre parcouru au-delà de 2 000 kilomètres.
- Formule 3 : forfait hebdomadaire de 380 € et 0,32 € par kilomètre parcouru, toute semaine entamée étant payée intégralement.

1) Traduire, pour une semaine de location, chaque formule par une écriture de la forme (où x désigne le nombre de kilomètres parcourus pour la semaine de location) :
   $f(x)$, pour la formule 1,
   $g(x)$, pour la formule 2,
   $h(x)$, pour la formule 3.
   Vérifier, en particulier, que pour $x > 2\,000$, on a : $g(x) = 200 + 0,25x$.
2) Représenter graphiquement ces trois formules de location pour $x \in [0; 3\,000]$, dans le cas décrit à la question précédente, dans un même repère. On prendra comme unité :
   1 cm = 200 km pour les abscisses et
   1 cm = 100 € pour les ordonnées
3) Déterminer la formule la plus avantageuse pour une semaine de location en fonction du nombre de kilomètres parcourus de deux manières différentes :
   a) avec le graphique
   b) par le calcul.
4) Un client pense faire 2500 km, quelle formule lui conseilleriez vous ?
5) Un client a choisi la formule 1 pour **deux semaines** de vacances. Il a parcouru 4500 kilomètres. A-t-il fait le bon choix ?

Autre application : conversion d'unité

EXERCICE 30

En France l'unité usuelle de température est le degré Celsius qui est noté °C. Dans certains pays anglo-saxon, comme les États-Unis, l'unité usuelle est le degré Fahrenheit qui est noté °F. Tous les français en visite à Los Angeles ont éprouvé un certain malaise en écoutant la météo annoncée une température de 90° pour le lendemain. Il s'agit bien évidement de degré Fahrenheit. Réduisons ce malaise en convertissant les degrés Celsius en degré Fahrenheit à l'aide d'une fonction affine. Il faut bien évidement deux informations pour déterminer cette fonction. Les changements d'états de l'eau − servant de base à la définition du degré Celsius − permettent la conversion :

- Quand l'eau gèle (0°C) un californien pense 32°F.
- Quand l'eau bout (100°C) le californien pense 212°F.

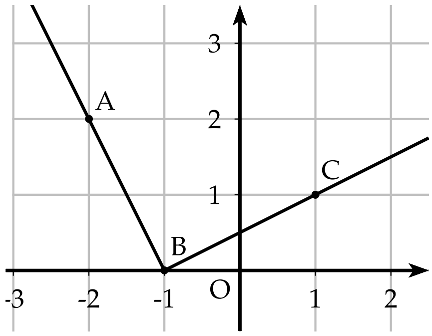
1. Déduire de ces renseignements l'expression de $f(x)$ où f est la fonction qui à une température x exprimée en degré Celsius associe la température $f(x)$ exprimée en degré Fahrenheit.
2. Représenter la fonction f pour une température comprise entre 0 et 50°C. On prendra comme unités : 1 cm = 5 °C sur les abscisses et 1 cm = 10 °F sur les ordonnées.
3. Utiliser ce graphique pour répondre aux questions suivantes :
   a) Lorsqu'à Los Angeles le thermomètre indique 90°F, est-ce une température caniculaire ?
   b) Un médecin américain s'inquiète-t-il quand le thermomètre d'un malade indique 100°F ?
   c) A quelle température dans sa chambre d'hôtel, un touriste français à Los Angeles doit-il s'attendre ?
4. Retrouver ces résultats par le calcul.
5. Peut-on trouver une température qui s'exprime par le même nombre en ° C et ° F ?

Fonctions affines par intervalles

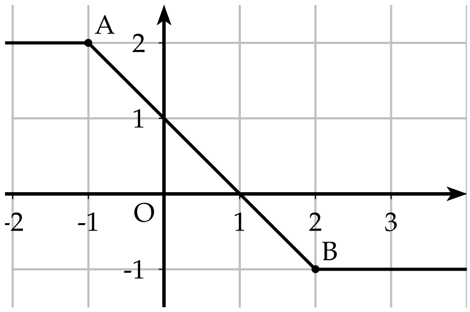
EXERCICE 31

Donner les expressions des fonctions affines dont les représentations sont données ci-dessous

a)



b)



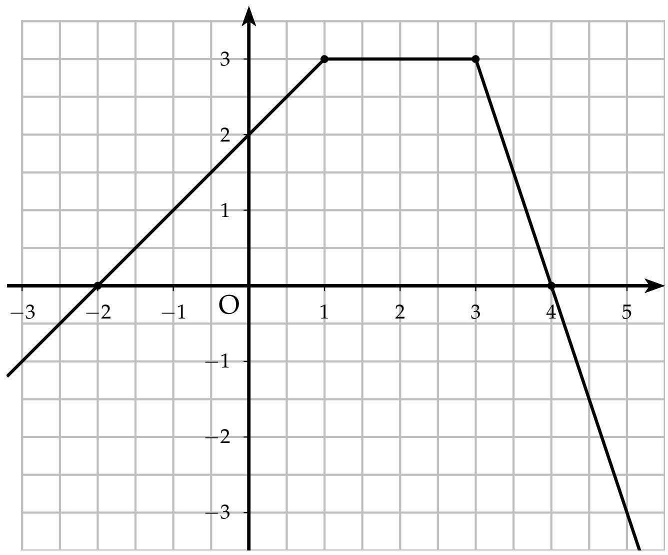
EXERCICE 32

Représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x+5 & \text{si } x < -2 \\ f(x) = 1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ f(x) = -2x+5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

EXERCICE 33

Résolution d'une inéquation



La courbe ci-dessus est celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1) Trouver les expressions de la fonction f définie par intervalles.
2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - x$
   a) Tracer la fonction g sur le graphique.
   b) Graphiquement, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. Par le calcul donner la valeur exacte de chacune.
3) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

EXERCICE 34

Une cuve est formée de deux cubes superposés qui communiquent. L'arête du grand cube mesure 80 cm et celle du petit 60 cm.

On désigne par x (en cm) la hauteur du liquide dans la cuve et par $\mathcal{V}(x)$ le volume en litres correspondant.

Représenter sur votre calculatrice le volume $\mathcal{V}(x)$ en fonction de x