FONCTIONS POLYNÔMES HOMOGRAPHIQUES

1. Définition FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

Définition (on suppose $c \neq 0$ et les couples $(a\,;b)$ et $(c\,;d)$ non proportionnels).

Toute fonction s'écrivant $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des nombres réels, avec c non nul est appelée une **fonction homographique**.

Puisque $c \neq 0$, l'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels auquel on exclut toujours une valeur : $\dfrac{-d}{c}$ ainsi : $D_f=\mathbb{R}/\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$

Exemple :

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x-3}{5x+7}$ est une fonction homographique avec $a=2$, $b=-3$, $c=5$ et $d=5$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ et (H) sa courbe représentative.

→L'ensemble de définition de f est $D_f=\mathbb{R}/\{-1\}$.

2. Variations et courbe représentative

Toute fonction homographique $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x)=\alpha+\frac{\beta}{cx+d} \text{ avec } \alpha, \beta, c, d \text{ réels et } c\neq 0.$$

La courbe représentative d'une est une **hyperbole**.

Elle admet deux **asymptotes**, l'une horizontale d'équation y = α, l'autre verticale d'équation $x=\dfrac{-d}{c}$

Le point d'intersection de ces deux droites est le **centre de symétrie** de l'hyperbole.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ et (H) sa courbe représentative.

1. L'ensemble de définition de f est $D_f=\mathbb{R}/\{-1\}$.

2. Montrer que pour tout x de $D_f=\mathbb{R}/\{-1\}$, $f(x)=2-\dfrac{5}{x+1}$.

$$f(x)=2-\frac{5}{x+1}=2\times\frac{x+1}{x+1}-\frac{5}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}-\frac{5}{x+1}=\frac{2x+2-5}{x+1}=\frac{2x-3}{x+1}$$

3. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$, puis sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

Soit $a,b\in\,]-\infty\,;-1[$ tels que a < b :

$$f(a)-f(b)=\left(2-\frac{5}{a+1}\right)-\left(2-\frac{5}{b+1}\right)=2-\frac{5}{a+1}-2+\frac{5}{b+1}=\frac{5}{b+1}-\frac{5}{a+1}$$

$$f(a)-f(b)=\frac{5(a+1)}{(b+1)(a+1)}-\frac{5(b+1)}{(a+1)(b+1)}=\frac{5a+5}{(b+1)(a+1)}-\frac{5b+5}{(a+1)(b+1)}=\frac{5a+5-5b-5}{(b+1)(a+1)}$$

$$f(a)-f(b)=\frac{5(a-b)}{(b+1)(a+1)}$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<0$

On sait que $a<-1$ et $b<-1$ donc $a-1<0$ et $b-1<0$

Donc : $f(a)-f(b)<0$ soit : $f(a)<f(b)$: la fonction f est croissante sur $]-\infty;-1[$.

Soit $a,b\in]-1;+\infty[$ tels que a < b : $f(a)-f(b)=\dfrac{5(a-b)}{(b+1)(a+1)}$

On sait que $a<b$ donc $a-b<0$

On sait que $a>-1$ et $b>-1$ donc $a-1>0$ et $b-1>0$

Donc : $f(a)-f(b)<0$ soit : $f(a)<f(b)$: la fonction f est croissante sur $]-1;+\infty[$.

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (H) avec chacun des axes du repère.

Intersection avec l'axe des ordonnées :

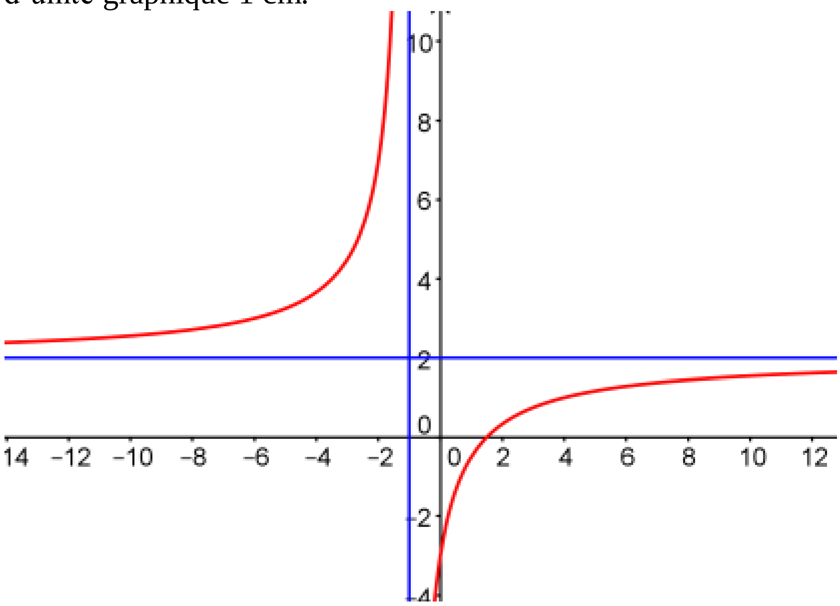
$$f(0)=2-\frac{5}{0+1}=2-5=-3 \text{ d'où le point A}(0;-3).$$

Intersection avec l'axe des abscisses :

$$f(x)=0 \iff \frac{2x-3}{x+1}=0$$

Si $\dfrac{A}{B}=0$ alors $A=0$ soit : $2x-3=0$ soit : $x=\dfrac{3}{2}$ d'où le point B $\left(\dfrac{3}{2};0\right)$

c) Tracer la courbe représentative (H) de f, ainsi que les droites d_1 et d_2 d'équations $x=-1$ et $y=2$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.



Exercice

Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{3x-4}{x+2}$ et (H) sa courbe représentative.

1. Préciser l'ensemble de définition de f, noté D_g.

$$D_g=\mathbb{R}/\{-2\}$$

2. Montrer que pour tout x de D_g, $g(x)=3-\dfrac{10}{x+2}$.

$$g(x)=3-\frac{10}{x+2}=3\times\frac{x+2}{x+2}-\frac{10}{x+2}=\frac{3x+6}{x+2}-\frac{10}{x+2}=\frac{3x-4}{x+2}$$

3. Etudier les variations de f sur l'intervalle $]-\infty;-2[$, puis sur l'intervalle $]-2;+\infty[$. Dresser le tableau de variation de g.

Soit $a,b \in]-\infty;-2[$ tels que a < b :

$$g(a)-g(b)=\left(3-\frac{10}{a+2}\right)-\left(3-\frac{10}{b+2}\right)=3-\frac{10}{a+2}-3+\frac{10}{b+2}=\frac{10}{b+2}-\frac{10}{a+2}$$

$$g(a)-g(b)=\frac{10(a+2)}{(b+2)(a+2)}-\frac{10(b+2)}{(a+2)(b+2)}=\frac{10a+20}{(b+2)(a+2)}-\frac{10b+20}{(b+2)(a+2)}$$

$$g(a)-g(b)=\frac{10a+20-10b-20}{(b+2)(a+2)}=\frac{10(a-b)}{(b+2)(a+2)}$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<0$

On sait que $a<-2$ et $b<-2$ donc $a-2<0$ et $b-2<0$

Donc : $g(a)-g(b)<0$ soit : $g(a)<g(b)$: la fonction f est croissante sur $]-\infty;-2[$.

Soit $a,b \in]-2;+\infty[$ tels que a < b :

$$g(a)-g(b)=\frac{10(a-b)}{(b+2)(a+2)}$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<0$

On sait que $a>-2$ et $b>-2$ donc $a-2>0$ et $b-2>0$

Donc : $g(a)-g(b)<0$ soit : $g(a)<g(b)$: la fonction f est croissante sur $]-2;+\infty[$.

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (H) avec chacun des axes du repère.

Intersection avec l'axe des ordonnées :

$$g(0)=3-\frac{10}{0+2}=3-5=-2 \text{ d'où le point } A(0;-2).$$

Intersection avec l'axe des abscisses :

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3x-4}{x+1}=0$$

Si $\frac{A}{B}=0$ alors $A=0$ soit : $3x-4=0$ soit : $x=\frac{4}{3}$ d'où le point B $\left(\frac{4}{3};0\right)$

5. Tracer sur le graphique donné ci-dessous la courbe représentative (H) de g, ainsi que les droites d_1 et d_2 d'équations $x=-2$ et $y=3$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.