CORRIGE - *Lycée Notre Dame de La Merci – Montpellier*

EXERCICE 4.1 Etudier le nombre de solutions puis résoudre ce système : $\begin{cases} 2x-4y=2 \\ x+3y=11 \end{cases}$

Les coefficients de ce système donnent : $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3-1\times(-4)=6+4=10$

→ce système possède un unique couple solution.

NB : On aurait également pu utiliser des vecteurs directeurs de ces deux droites, $\overrightarrow{u_1}\begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{vmatrix} -3 \\ 1 \end{vmatrix}$:

$4\times 1-2\times(-3)=4+6=10$ donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites ne sont pas parallèles.

$$\begin{cases} 2x-4y=2 \\ x+3y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\times(11-3y)-4y=2 \\ x=11-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22-6y-4y=2 \\ x=11-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10y=-20 \\ x=11-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-20}{-10}=2 \\ x=11-3\times 2=5 \end{cases}$$

Vérification : $2x-4y=2\times 5-4\times 2=10-8=2$

$x+3y=5+3\times 2=5+6=11$

Le couple $(5;2)$ est solution de ce système.

EXERCICE 4.2 Etudier le nombre de solutions puis résoudre ce système : $\begin{cases} 3x-2y=-7 \\ -4x+5y=7 \end{cases}$

Les coefficients de ce système donnent : $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3\times 5-(-2)\times(-4)=10-8=2$

→ce système possède un unique couple solution.

NB : On aurait également pu utiliser des vecteurs directeurs de ces deux droites, $\overrightarrow{u_1}\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{vmatrix} -5 \\ -4 \end{vmatrix}$:

$2\times(-4)-3\times(-5)=-8+15=7$ donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles

$$\begin{cases} 3x-2y=-7 & \times 4 \\ -4x+5y=7 & \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x-8y=-28 \\ -12x+15y=21 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{on ajoute les deux lignes}) \begin{cases} 3x-2y=-7 \\ 12x-8y+(-12x+15y)=-28+21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=-7 \\ 12x-8y-12x+15y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=-7 \\ 7y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2y-7=2\times(-1)-7=-9 \\ y=\dfrac{-7}{7}=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-9}{3}=-3 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vérification : $3\times(-3)-2\times(-1)=-9+2=-7$

$-4\times(-3)+5\times(-1)=12-5=7$

Le couple $(-3;-1)$ est solution de ce système.

EXERCICE 4.3 Etudier le nombre de solutions puis résoudre ce système : $\begin{cases} 5x-2y=11 \\ -10x+4y=9 \end{cases}$

Les coefficients de ce système donnent : $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 5\times4-(-2)\times(-10)=20-20=0$

→les droites sont parallèles ou confondues : il y a une infinité de solutions ou aucune solution.

NB : On aurait également pu utiliser des vecteurs directeurs de ces deux droites, $\overrightarrow{u_1}\begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{vmatrix} -4 \\ -10 \end{vmatrix}$:

$2\times(-10)-5\times(-4)=-20+20=0$

→ces vecteurs sont colinéaires, les droites sont parallèles ou confondues

On trouve un point de la première droite (habituellement on prend $x=0$ ou $y=0$) :

Si $x=0$ alors $5\times0-2y=11 \iff y=-\dfrac{11}{2}$, ce qui donne le point de coordonnées $\left(0;-\dfrac{11}{2}\right)$

Ce point appartient-il à la deuxième droite ?

$-10x+4y=-10\times0+4\times\left(-\dfrac{11}{2}\right)=-\dfrac{44}{2}=-22\neq 9$

Ce point n'appartient pas à la deuxième droite donc les deux droites sont parallèles et distinctes

→ Ce système n'admet pas de solution : $S=\varnothing$

EXERCICE 4.4 Etudier le nombre de solutions puis résoudre ce système : $\begin{cases} -x-2y=4 \\ 3x+6y=-12 \end{cases}$

Les coefficients de ce système donnent : $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -1\times6-(-2)\times3=-6+6=0$

→les droites sont parallèles ou confondues : il y a une infinité de solutions ou aucune solution.

NB : On aurait également pu utiliser des vecteurs directeurs de ces deux droites, $\overrightarrow{u_1}\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{vmatrix} -6 \\ 3 \end{vmatrix}$:

$2\times3-(-1)\times(-6)=6-6=0$

→ $\overrightarrow{u_2}=-3\overrightarrow{u_1}$: ces vecteurs sont colinéaires, les droites sont parallèles ou confondues

On trouve un point de la première droite (habituellement on prend $x=0$ ou $y=0$) :

Si $y=0$ alors $-x-2\times0=4 \iff x=-4$, ce qui donne le point de coordonnées $(-4;0)$

Ce point appartient-il à la deuxième droite ?

$3x+6y=3\times(-4)+6\times0=-12$

Ce point appartient à la deuxième droite donc les deux droites sont confondues :

→ Ce système admet une infinité de solutions toutes situées sur la droite d'équation $-x-2y=4$.

$S=\{(x;y)\text{ tels que} -x-2y=4\}$