

CORRIGE – NOTRE DAME LA MERCI - Montpellier

EXERCICE 5A.1

Soit la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 5$

1. Etude du signe de $f(a) - f(b)$:

Soient $a, b \in]-\infty; +\infty[$ tels que $a < b$:

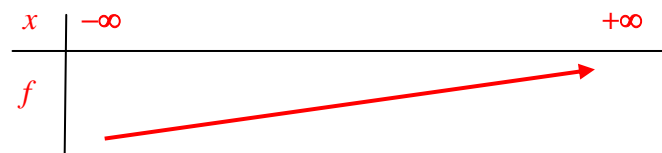
$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= (2a - 5) - (2b - 5) \\ &= 2a - 5 - 2b + 5 = 2a - 2b = 2(a - b) \end{aligned}$$

On sait que $a < b$ donc $a - b < b - b$ soit $a - b < 0$

→ AINSI $f(a) - f(b) < 0$ soit $f(a) < f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) < f(b)$, alors la fonction f est croissante sur $]-\infty; +\infty[$.

2. Tableau de variation de f :



EXERCICE 5A.2

Soit la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par :

$$f(x) = -4x + 1$$

1. Etude du signe de $f(a) - f(b)$:

Soient $a, b \in]-\infty; +\infty[$ tels que $a < b$:

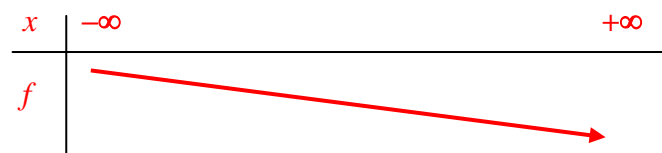
$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= (-4a + 1) - (-4b + 1) \\ &= -4a + 1 + 4b - 1 = 4b - 4a = 4(b - a) \end{aligned}$$

On sait que $a < b$ donc $a - a < b - a$ soit $0 < b - a$

→ AINSI $f(a) - f(b) > 0$ soit $f(a) > f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) > f(b)$, alors la fonction f est décroissante sur $]-\infty; +\infty[$.

2. Tableau de variation de f :



EXERCICE 5A.3

Soit la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 3$$

1. a. Soient $a, b \in [0; +\infty[$ tels que $a < b$:

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= (a^2 - 3) - (b^2 - 3) = a^2 - 3 - b^2 + 3 \\ &= a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \end{aligned}$$

On sait que $a < b$ donc $a - b < b - b$ soit $a - b < 0$

On sait que $a > 0$ et $b > 0$ donc $a + b > 0$

→ AINSI $(a + b)(a - b) < 0$

→ AINSI $f(a) - f(b) < 0$ soit $f(a) < f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) < f(b)$, alors la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

b. Soient $a, b \in]-\infty; 0]$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = (a + b)(a - b)$$

On sait que $a < b$ donc $a - b < b - b$ soit $a - b < 0$

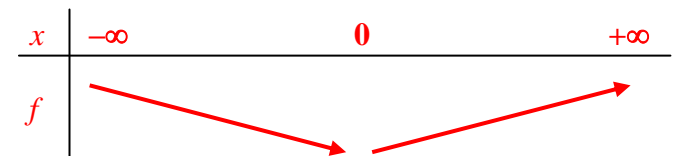
On sait que $a < 0$ et $b < 0$ donc $a + b < 0$

→ AINSI $(a + b)(a - b) > 0$

→ AINSI $f(a) - f(b) > 0$ soit $f(a) > f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) > f(b)$, alors la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

2. Tableau de variation de f :



EXERCICE 5A.4

Soit la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x + 2)^2 - 6$$

1. a. Soient $a, b \in [-2; +\infty[$ tels que $a < b$:

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= [(a + 2)^2 - 6] - [(b + 2)^2 - 6] \\ &= (a + 2)^2 - 6 - (b + 2)^2 + 6 = (a + 2)^2 - (b + 2)^2 \\ &= [(a + 2) + (b + 2)][(a + 2) - (b + 2)] \\ &= [a + 2 + b + 2][a + 2 - b - 2] \\ &= (a + b + 4)(a - b) \end{aligned}$$

On sait que $a < b$ donc $a - b < b - b$ soit $a - b < 0$

On sait que $a > -2$ et $b > -2$ donc $a + b > -4$

et $a + b + 4 > 0$

→ AINSI $(a + b + 4)(a - b) < 0$

→ AINSI $f(a) - f(b) < 0$ soit $f(a) < f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) < f(b)$, alors la fonction f est croissante sur $[-2; +\infty[$.

b. Soient $a, b \in]-\infty; -2]$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = (a + b + 4)(a - b)$$

On sait que $a < b$ donc $a - b < b - b$ soit $a - b < 0$

On sait que $a < -2$ et $b < -2$ donc $a + b < -4$

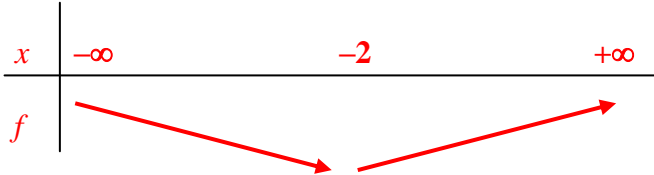
et $a + b + 4 < 0$

→ AINSI $(a+b+4)(a-b) > 0$

→ AINSI $f(a) - f(b) > 0$ soit $f(a) > f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) > f(b)$, alors la fonction f est décroissante sur $]-\infty; -2]$.

2. Tableau de variation de f :



EXERCICE 5A.5

Soit la fonction définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

1. a. Soient $a, b \in]1; +\infty[$ tels que $a < b$:

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{1}{a-1} - \frac{1}{b-1} \\ &= \frac{1 \times (b-1)}{(a-1) \times (b-1)} - \frac{1 \times (a-1)}{(b-1) \times (a-1)} \\ &= \frac{(b-1) - (a-1)}{(a-1)(b-1)} = \frac{b-1-a+1}{(a-1)(b-1)} \\ &= \frac{b-a}{(a-1)(b-1)} \end{aligned}$$

On sait que $a < b$ donc $a-a < b-a$ soit $0 < b-a$

On sait que $a > 1$ et $b > 1$

donc $a-1 > 0$ et $b-1 > 0$

$$\rightarrow \text{AINSI } \frac{b-a}{(a-1)(b-1)} > 0 \rightarrow \frac{(+)}{(+)\times(+)} = (+)$$

→ AINSI $f(a) - f(b) > 0$ soit $f(a) > f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) > f(b)$, alors la fonction f est décroissante sur $]1; +\infty[$.

b. Soient $a, b \in]-\infty; 1[$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = \frac{b-a}{(a-1)(b-1)}$$

On sait que $a < b$ donc $a-a < b-a$ soit $0 < b-a$

On sait que $a < 1$ et $b < 1$

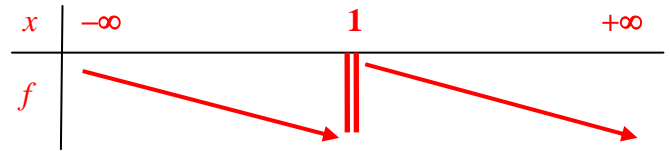
donc $a-1 < 0$ et $b-1 < 0$

$$\rightarrow \text{AINSI } \frac{b-a}{(a-1)(b-1)} > 0 \rightarrow \frac{(+)}{(-)\times(-)} = (+)$$

→ AINSI $f(a) - f(b) > 0$ soit $f(a) > f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) > f(b)$, alors la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 1[$.

2. Tableau de variation de f :



EXERCICE 5A.6

Soit la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 8x + 3$$

1. Soit a et b deux réels.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= (a^2 - 8a + 3) - (b^2 - 8b + 3) \\ &= a^2 - 8a + 3 - b^2 + 8b - 3 \\ &= a^2 - b^2 + 8b - 8a \\ &= (a+b)(a-b) + 8(b-a) \\ &= (a+b)(a-b) - 8(a-b) \\ &= (a-b)(a+b-8) \end{aligned}$$

2. a. Soient $a, b \in [4; +\infty[$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = (a-b)(a+b-8)$$

On sait que $a < b$ donc $a-b < b-b$ soit $a-b < 0$

On sait que $a > 4$ et $b > 4$

donc $a+b > 8$ et $a+b-8 > 0$

→ AINSI $(a-b)(a+b-8) < 0 \rightarrow (-)\times(+)=(-)$

→ AINSI $f(a) - f(b) < 0$ soit $f(a) < f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) < f(b)$, alors la fonction f est croissante sur $[4; +\infty[$.

b. Soient $a, b \in]-\infty; 4]$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = (a-b)(a+b-8)$$

On sait que $a < b$ donc $a-b < b-b$ soit $a-b < 0$

On sait que $a < 4$ et $b < 4$

donc $a+b < 8$ et $a+b-8 < 0$

→ AINSI $(a-b)(a+b-8) > 0 \rightarrow (-)\times(-)=(+)$

→ AINSI $f(a) - f(b) > 0$ soit $f(a) > f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) > f(b)$, alors la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 4]$.

3. Tableau de variation de f :



EXERCICE 5A.7

Soit la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 1$$

1. Soit a et b deux réels.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= (-2a^2 + 4a + 1) - (-2b^2 + 4b + 1) \\ &= -2a^2 + 4a + 1 + 2b^2 - 4b - 1 \\ &= 2(b^2 - a^2) + 4(a - b) \\ &= 2(b + a)(b - a) - 4(b - a) \\ &= 2(b - a) \times (b + a) - 2(b - a) \times 2 \\ &= 2(b - a) \times (b + a - 2) \end{aligned}$$

2. a. Soient $a, b \in [1; +\infty[$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = 2(b - a) \times (b + a - 2)$$

On sait que $a < b$ donc $a - a < b - a$ soit $0 < b - a$

On sait que $a > 1$ et $b > 1$

donc $a + b > 2$ et $a + b - 2 > 0$

→ AINSI $2(b - a) \times (b + a - 2) > 0 \rightarrow (+) \times (+) = (+)$

→ AINSI $f(a) - f(b) > 0$ soit $f(a) > f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) > f(b)$, alors la fonction f est décroissante sur $[1; +\infty[$.

b. Soient $a, b \in]-\infty; 1]$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = 2(b - a) \times (b + a - 2)$$

On sait que $a < b$ donc $a - a < b - a$ soit $0 < b - a$

On sait que $a < 1$ et $b < 1$

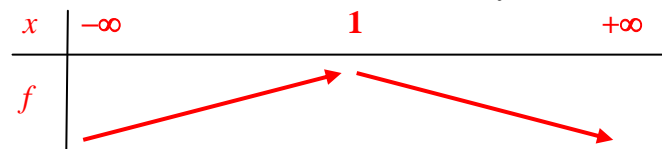
donc $a + b < 2$ et $a + b - 2 < 0$

→ AINSI $2(b - a) \times (b + a - 2) < 0 \rightarrow (+) \times (-) = (-)$

→ AINSI $f(a) - f(b) < 0$ soit $f(a) < f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) < f(b)$, alors la fonction f est croissante sur $]-\infty; 1]$.

3. Dresser le **tableau de variation** de f :



EXERCICE 5A.8

Soit la fonction définie sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ par :

$$f(x) = 4 + \frac{2}{x-3}$$

1. Soit a et b deux réels.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \left(4 + \frac{2}{a-3}\right) - \left(4 + \frac{2}{b-3}\right) \\ &= 4 + \frac{2}{a-3} - 4 - \frac{2}{b-3} \\ &= \frac{2 \times (b-3)}{(a-3) \times (b-3)} - \frac{2 \times (a-3)}{(b-3) \times (a-3)} \\ &= \frac{2(b-3) - 2(a-3)}{(a-3)(b-3)} \\ &= \frac{2b - 6 - 2a + 6}{(a-3)(b-3)} = \frac{2(b-a)}{(a-3)(b-3)} \end{aligned}$$

2. a. Soient $a, b \in]3; +\infty[$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = \frac{2(b-a)}{(a-3)(b-3)}$$

On sait que $a < b$ donc $a - a < b - a$ soit $0 < b - a$

On sait que $a > 3$ et $b > 3$

donc $a - 3 > 0$ et $b - 3 > 0$

→ AINSI $\frac{2(b-a)}{(a-3)(b-3)} > 0 \rightarrow \frac{(+)}{(+)\times(+)} = (+)$

→ AINSI $f(a) - f(b) > 0$ soit $f(a) > f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) > f(b)$, alors la fonction f est décroissante sur $]3; +\infty[$.

b. Soient $a, b \in]-\infty; 3[$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = \frac{2(b-a)}{(a-3)(b-3)}$$

On sait que $a < b$ donc $a - a < b - a$ soit $0 < b - a$

On sait que $a < 3$ et $b < 3$

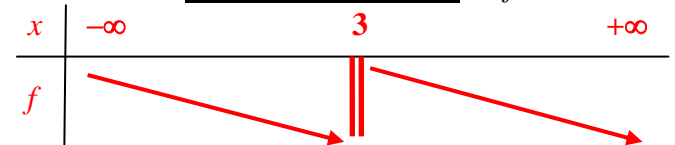
donc $a - 3 < 0$ et $b - 3 < 0$

→ AINSI $\frac{2(b-a)}{(a-3)(b-3)} > 0 \rightarrow \frac{(+)}{(-)\times(-)} = (+)$

→ AINSI $f(a) - f(b) > 0$ soit $f(a) > f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) > f(b)$, alors la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 3[$.

3. Dresser le **tableau de variation** de f :



EXERCICE 5A.9

Soit la fonction définie sur $] -\infty; -5[\cup] -5; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{3}{x+5}$$

1. Soit a et b deux réels.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \left(2 - \frac{3}{a+5}\right) - \left(2 - \frac{3}{b+5}\right) \\ &= 2 - \frac{3}{a+5} - 2 + \frac{3}{b+5} = \frac{3}{b+5} - \frac{3}{a+5} \\ &= \frac{3 \times (a+5)}{(b+5) \times (a+5)} - \frac{3 \times (b+5)}{(a+5) \times (b+5)} \\ &= \frac{3(a+5) - 3(b+5)}{(b+5)(a+5)} \\ &= \frac{3a+15-3b-15}{(b+5)(a+5)} = \frac{3(a-b)}{(b+5)(a+5)} \end{aligned}$$

2. a. Soient $a, b \in] -5; +\infty[$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = \frac{3(a-b)}{(b+5)(a+5)}$$

On sait que $a < b$ donc $a - b < b - b$ soit $a - b < 0$

On sait que $a > -5$ et $b > -5$

donc $a+5 > 0$ et $b+5 > 0$

$$\rightarrow \text{AINSI } \frac{3(a-b)}{(b+5)(a+5)} < 0 \rightarrow \frac{(-)}{(+)\times(+)} = (-)$$

\rightarrow AINSI $f(a) - f(b) < 0$ soit $f(a) < f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) < f(b)$, alors la fonction f est croissante sur $] -5; +\infty[$.

b. Soient $a, b \in] -\infty; -5[$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = \frac{3(a-b)}{(b+5)(a+5)}$$

On sait que $a < b$ donc $a - b < b - b$ soit $a - b < 0$

On sait que $a < -5$ et $b < -5$

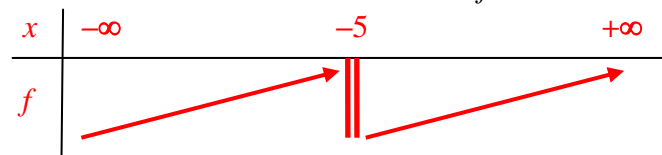
donc $a+5 < 0$ et $b+5 < 0$

$$\rightarrow \text{AINSI } \frac{3(a-b)}{(b+5)(a+5)} < 0 \rightarrow \frac{(-)}{(-)\times(-)} = (-)$$

\rightarrow AINSI $f(a) - f(b) < 0$ soit $f(a) < f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) < f(b)$, alors la fonction f est croissante sur $] -\infty; -5[$.

3. Dresser le tableau de variation de f :



EXERCICE 5A.10

Soit la fonction définie sur $] -\infty; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$$

1. Soit a et b deux réels.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{3}{a^2 + 1} - \frac{3}{b^2 + 1} \\ &= \frac{3 \times (b^2 + 1)}{(a^2 + 1) \times (b^2 + 1)} - \frac{3 \times (a^2 + 1)}{(b^2 + 1) \times (a^2 + 1)} \\ &= \frac{3(b^2 + 1) - 3(a^2 + 1)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} \\ &= \frac{3b^2 + 3 - 3a^2 - 3}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} = \frac{3(b^2 - a^2)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} \\ &= \frac{3(b+a)(b-a)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} \end{aligned}$$

2. a. Soient $a, b \in [0; +\infty[$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = \frac{3(b+a)(b-a)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$

On sait que $a < b$ donc $a - a < b - a$ soit $0 < b - a$

On sait que $a > 0$ et $b > 0$ donc $a + b > 0$

On sait que $a^2 > 0$ et $b^2 > 0$

donc $a^2 + 1 > 0$ et $b^2 + 1 > 0$

$$\rightarrow \text{AINSI } \frac{3(b+a)(b-a)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} > 0 \rightarrow \frac{(+)\times(+)}{(+)\times(+)} = (+)$$

\rightarrow AINSI $f(a) - f(b) > 0$ soit $f(a) > f(b)$

Si $a < b$ implique $f(a) > f(b)$, alors la fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

b. Soient $a, b \in] -\infty; 0]$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = \frac{3(b+a)(b-a)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$

On sait que $a < b$ donc $a - a < b - a$ soit $0 < b - a$

On sait que $a < 0$ et $b < 0$ donc $a + b < 0$

On sait que $a^2 > 0$ et $b^2 > 0$

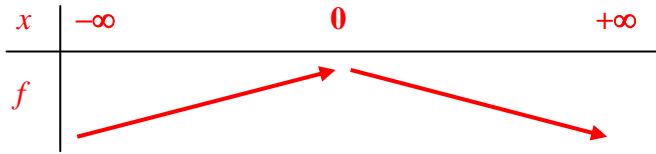
donc $a^2 + 1 > 0$ et $b^2 + 1 > 0$

$$\rightarrow \text{AINSI } \frac{3(b+a)(b-a)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} < 0 \rightarrow \frac{(-)\times(+)}{(+)\times(+)} = (-)$$

→ AINSI $f(a) - f(b) < 0$ soit $f(a) - f(b) < 0$

Si $a < b$ implique $f(a) - f(b) < 0$, alors la fonction f est croissante sur $]-\infty; 0]$.

3. Tableau de variation de f :



EXERCICE 5A.11

Soit la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = (a^3 - 3a) - (b^3 - 3b) = a^3 - 3a - b^3 + 3b = a^3 - b^3 - 3a + 3b$$

Or si l'on développe la factorisation proposée, on obtient :

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 - 3) = a^3 + a^2b + ab^2 - 3a - ba^2 - ab^2 - b^3 + 3b = a^3 - 3a - b^3 + 3b$$

AINSI $f(a) - f(b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2 - 3)$

2. A l'aide des propriétés des inégalités, déterminer le signe de $(a^2 + ab + b^2 - 3)$ dans les cas suivants :

a. $a > 1$ et $b > 1$ $a^2 > 1 ; b^2 > 1 ; ab > 1$ d'où $a^2 + ab + b^2 > 3$ et $a^2 + ab + b^2 - 3 > 0$	b. $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$ $a^2 < 1 ; b^2 < 1 ; ab < 1$ d'où $a^2 + ab + b^2 < 3$ et $a^2 + ab + b^2 - 3 < 0$	c. $-1 \leq a \leq 0$ et $-1 \leq b \leq 0$ $a^2 < 1 ; b^2 < 1 ; ab < 1$ d'où $a^2 + ab + b^2 < 3$ et $a^2 + ab + b^2 - 3 < 0$	d. $a < -1$ et $b < -1$ $a^2 > 1 ; b^2 > 1 ; ab > 1$ d'où $a^2 + ab + b^2 > 3$ et $a^2 + ab + b^2 - 3 > 0$
--	--	--	--

3. Compléter le tableau suivant : $a < b$ donc $a - b < 0$

a et b	$a < b < -1$	$-1 \leq a < b \leq 0$	$0 \leq a < b \leq 1$	$1 < a < b$
$a - b$	-	-	-	-
$a^2 + ab + b^2 - 3$	+	-	-	+
$f(a) - f(b)$	-	+	+	-

Bilan :

Soient $a, b \in]-\infty; -1]$ tels que $a < b$: $f(a) - f(b) < 0$: la fonction f est croissante sur $]-\infty; -1]$.

Soient $a, b \in [-1; 1]$ tels que $a < b$: $f(a) - f(b) > 0$: la fonction f est décroissante sur $]-\infty; -1]$.

Soient $a, b \in [1; +\infty[$ tels que $a < b$: $f(a) - f(b) < 0$: la fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$.

4. Tableau de variation de f :

