CORRIGE – NOTRE DAME LA MERCI - *Montpellier*

EXERCICE 5A.1

Soit la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x)=2x-5$

1. Etude du signe de $f(a)-f(b)$ **:**

Soient $a,b\in]-\infty;+\infty[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=(2a-5)-(2b-5)$$
$$=2a-5-2b-5=2a-2b=2(a-b)$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<b-b$ soit $a-b<0$

→AINSI $f(a)-f(b)<0$ soit $f(a)<f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)<f(b)$, alors la fonction f **est croissante** sur $]-\infty;+\infty[$.

2. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f		↗	

EXERCICE 5A.2

Soit la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par :

$$f(x)=-4x+1$$

1. Etude du signe de $f(a)-f(b)$ **:**

Soient $a,b\in]-\infty;+\infty[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=(-4a+1)-(-4b+1)$$
$$=-4a+1+4b-1=4b-4a=4(b-a)$$

On sait que $a<b$ donc $a-a<b-a$ soit $0<b-a$

→AINSI $f(a)-f(b)>0$ soit $f(a)>f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)>f(b)$, alors la fonction f **est décroissante** sur $]-\infty;+\infty[$.

2. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f		↘	

EXERCICE 5A.3

Soit la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2-3$$

1. a. Soient $a,b\in[0;+\infty[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=(a^2-3)-(b^2-3)=a^2-3-b^2+3$$
$$=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<b-b$ soit $a-b<0$
On sait que $a>0$ et $b>0$ donc $a+b>0$

→ AINSI $(a+b)(a-b)<0$

→ AINSI $f(a)-f(b)<0$ soit $f(a)<f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)<f(b)$, alors la fonction f **est croissante** sur $[0;+\infty[$.

b. Soient $a,b\in]-\infty;0]$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=(a+b)(a-b)$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<b-b$ soit $a-b<0$
On sait que $a<0$ et $b<0$ donc $a+b<0$

→ AINSI $(a+b)(a-b)>0$

→ AINSI $f(a)-f(b)>0$ soit $f(a)>f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)>f(b)$, alors la fonction f **est décroissante** sur $]-\infty;0]$.

2. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘		↗	

.

EXERCICE 5A.4

Soit la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par :

$$f(x)=(x+2)^2-6$$

1. a. Soient $a,b\in[-2;+\infty[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\left[(a+2)^2-6\right]-\left[(b+2)^2-6\right]$$
$$=(a+2)^2-6-(b+2)^2+6=(a+2)^2-(b+2)^2$$
$$=\left[(a+2)+(b+2)\right]\left[(a+2)-(b+2)\right]$$
$$=\left[a+2+b+2\right]\left[a+2-b-2\right]$$
$$=(a+b+4)(a-b)$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<b-b$ soit $a-b<0$
On sait que $a>-2$ et $b>-2$ donc $a+b>-4$
et $a+b+4>0$

→ AINSI $(a+b+4)(a-b)<0$

→ AINSI $f(a)-f(b)<0$ soit $f(a)<f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)<f(b)$, alors la fonction f **est croissante** sur $[-2;+\infty[$.

b. Soient $a,b\in]-\infty;-2]$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=(a+b+4)(a-b)$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<b-b$ soit $a-b<0$
On sait que $a<-2$ et $b<-2$ donc $a+b<-4$
et $a+b+4<0$

→ AINSI $(a+b+4)(a-b)>0$

→ AINSI $f(a)-f(b)>0$ soit $f(a)>f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)>f(b)$, alors la fonction f **est décroissante** sur $]-\infty;-2]$.

2. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

EXERCICE 5A.5

Soit la fonction définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x-1}$$

1. a. Soient $a,b\in]1;+\infty[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\frac{1}{a-1}-\frac{1}{b-1}$$
$$=\frac{1\times(b-1)}{(a-1)\times(b-1)}-\frac{1\times(a-1)}{(b-1)\times(a-1)}$$
$$=\frac{(b-1)-(a-1)}{(a-1)(b-1)}=\frac{b-1-a+1}{(a-1)(b-1)}$$
$$=\frac{b-a}{(a-1)(b-1)}$$

On sait que $a<b$ donc $a-a<b-a$ soit $0<b-a$

On sait que $a>1$ et $b>1$

donc $a-1>0$ et $b-1>0$

→ AINSI $\frac{b-a}{(a-1)(b-1)}>0$ → $\frac{(+)}{(+)\times(+)}=(+)$

→ AINSI $f(a)-f(b)>0$ soit $f(a)>f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)>f(b)$, alors la fonction f **est décroissante** sur $]1;+\infty[$.

b. Soient $a,b\in]-\infty;1[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\frac{b-a}{(a-1)(b-1)}$$

On sait que $a<b$ donc $a-a<b-a$ soit $0<b-a$

On sait que $a<1$ et $b<1$

donc $a-1<0$ et $b-1<0$

→ AINSI $\frac{b-a}{(a-1)(b-1)}>0$ → $\frac{(+)}{(-)\times(-)}=(+)$

→ AINSI $f(a)-f(b)>0$ soit $f(a)>f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)>f(b)$, alors la fonction f **est décroissante** sur $]-\infty;1[$.

2. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\searrow$	‖	$\searrow$	

EXERCICE 5A.6

Soit la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2-8x+3$$

1. Soit a et b deux réels.

$$f(a)-f(b)=(a^2-8a+3)-(b^2-8b+3)$$
$$=a^2-8a+3-b^2+8b-3$$
$$=a^2-b^2+8b-8a$$
$$=(a+b)(a-b)+8(b-a)$$
$$=(a+b)(a-b)-8(a-b)$$
$$=(a-b)(a+b-8)$$

2. a. Soient $a,b\in[4;+\infty[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=(a-b)(a+b-8)$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<b-b$ soit $a-b<0$

On sait que $a>4$ et $b>4$

donc $a+b>8$ et $a+b-8>0$

→ AINSI $(a-b)(a+b-8)<0$ → $(-)\times(+)=(-)$

→ AINSI $f(a)-f(b)<0$ soit $f(a)<f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)<f(b)$, alors la fonction f **est croissante** sur $[4;+\infty[$.

b. Soient $a,b\in]-\infty;4]$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=(a-b)(a+b-8)$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<b-b$ soit $a-b<0$

On sait que $a<4$ et $b<4$

donc $a+b<8$ et $a+b-8<0$

→ AINSI $(a-b)(a+b-8)>0$ → $(-)\times(-)=(+)$

→ AINSI $f(a)-f(b)>0$ soit $f(a)>f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)>f(b)$, alors la fonction f **est décroissante** sur $]-\infty;4]$.

3. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

EXERCICE 5A.7

Soit la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par :

$$f(x)=-2x^2+4x+1$$

1. Soit a et b deux réels.

$$\begin{aligned}f(a)-f(b)&=\left(-2a^2+4a+1\right)-\left(-2b^2+4b+1\right)\\&=-2a^2+4a+1+2b^2-4b-1\\&=2\left(b^2-a^2\right)+4(a-b)\\&=2(b+a)(b-a)-4(b-a)\\&=2(b-a)\times(b+a)-2(b-a)\times 2\\&=2(b-a)\times(b+a-2)\end{aligned}$$

2. a. Soient $a,b\in[1;+\infty[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=2(b-a)\times(b+a-2)$$

On sait que $a<b$ donc $a-a<b-a$ soit $0<b-a$

On sait que $a>1$ et $b>1$

donc $a+b>2$ et $a+b-2>0$

→ AINSI $2(b-a)\times(b+a-2)>0$ → $(+)\times(+)=(+)$

→ AINSI $f(a)-f(b)>0$ soit $f(a)>f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)>f(b)$, alors la fonction f **est décroissante** sur $[1;+\infty[$.

b. Soient $a,b\in]-\infty;1]$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=2(b-a)\times(b+a-2)$$

On sait que $a<b$ donc $a-a<b-a$ soit $0<b-a$

On sait que $a<1$ et $b<1$

donc $a+b<2$ et $a+b-2<0$

→ AINSI $2(b-a)\times(b+a-2)<0$ → $(+)\times(-)=(-)$

→ AINSI $f(a)-f(b)<0$ soit $f(a)<f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)<f(b)$, alors la fonction f **est croissante** sur $]-\infty;1]$.

3. Dresser le **tableau de variation** de f :

x	$-\infty$		**1**		$+\infty$
f		↗		↘	

EXERCICE 5A.8

Soit la fonction définie sur $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ par :

$$f(x)=4+\frac{2}{x-3}$$

1. Soit a et b deux réels.

$$\begin{aligned}f(a)-f(b)&=\left(4+\frac{2}{a-3}\right)-\left(4+\frac{2}{b-3}\right)\\&=4+\frac{2}{a-3}-4-\frac{2}{b-3}\\&=\frac{2\times(b-3)}{(a-3)\times(b-3)}-\frac{2\times(a-3)}{(b-3)\times(a-3)}\\&=\frac{2(b-3)-2(a-3)}{(a-3)(b-3)}\\&=\frac{2b-6-2a+6}{(a-3)(b-3)}=\frac{2(b-a)}{(a-3)(b-3)}\end{aligned}$$

2. a. Soient $a,b\in]3;+\infty[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\frac{2(b-a)}{(a-3)(b-3)}$$

On sait que $a<b$ donc $a-a<b-a$ soit $0<b-a$

On sait que $a>3$ et $b>3$

donc $a-3>0$ et $b-3>0$

→ AINSI $\dfrac{2(b-a)}{(a-3)(b-3)}>0$ → $\dfrac{(+)}{(+)\times(+)}=(+)$

→ AINSI $f(a)-f(b)>0$ soit $f(a)>f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)>f(b)$, alors la fonction f **est décroissante** sur $]3;+\infty[$.

b. Soient $a,b\in]-\infty;3[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\frac{2(b-a)}{(a-3)(b-3)}$$

On sait que $a<b$ donc $a-a<b-a$ soit $0<b-a$

On sait que $a<3$ et $b<3$

donc $a-3<0$ et $b-3<0$

→ AINSI $\dfrac{2(b-a)}{(a-3)(b-3)}>0$ → $\dfrac{(+)}{(-)\times(-)}=(+)$

→ AINSI $f(a)-f(b)>0$ soit $f(a)>f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)>f(b)$, alors la fonction f **est décroissante** sur $]-\infty;3[$.

3. Dresser le **tableau de variation** de f :

x	$-\infty$		**3**		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

EXERCICE 5A.9

Soit la fonction définie sur $]-\infty;-5[\cup]-5;+\infty[$ par :

$$f(x)=2-\frac{3}{x+5}$$

1. Soit a et b deux réels.

$$f(a)-f(b)=\left(2-\frac{3}{a+5}\right)-\left(2-\frac{3}{b+5}\right)$$
$$=2-\frac{3}{a+5}-2+\frac{3}{b+5}=\frac{3}{b+5}-\frac{3}{a+5}$$
$$=\frac{3\times(a+5)}{(b+5)\times(a+5)}-\frac{3\times(b+5)}{(a+5)\times(b+5)}$$
$$=\frac{3(a+5)-3(b+5)}{(b+5)(a+5)}$$
$$=\frac{3a+15-3b-15}{(b+5)(a+5)}=\frac{3(a-b)}{(b+5)(a+5)}$$

2. a. Soient $a,b\in]-5;+\infty[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\frac{3(a-b)}{(b+5)(a+5)}$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<b-b$ soit $a-b<0$

On sait que $a>-5$ et $b>-5$

donc $a+5>0$ et $b+5>0$

→ AINSI $\dfrac{3(a-b)}{(b+5)(a+5)}<0$ → $\dfrac{(-)}{(+)\times(+)}=(-)$

→ AINSI $f(a)-f(b)<0$ soit $f(a)<f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)<f(b)$, alors la fonction f **est croissante** sur $]-5;+\infty[$.

b. Soient $a,b\in]-\infty;-5[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\frac{3(a-b)}{(b+5)(a+5)}$$

On sait que $a<b$ donc $a-b<b-b$ soit $a-b<0$

On sait que $a<-5$ et $b<-5$

donc $a+5<0$ et $b+5<0$

→ AINSI $\dfrac{3(a-b)}{(b+5)(a+5)}<0$ → $\dfrac{(-)}{(-)\times(-)}=(-)$

→ AINSI $f(a)-f(b)<0$ soit $f(a)<f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)<f(b)$, alors la fonction f **est croissante** sur $]-\infty;-5[$.

3. Dresser le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
f		↗	‖	↗	

EXERCICE 5A.10

Soit la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3}{x^2+1}$$

1. Soit a et b deux réels.

$$f(a)-f(b)=\frac{3}{a^2+1}-\frac{3}{b^2+1}$$
$$=\frac{3\times(b^2+1)}{(a^2+1)\times(b^2+1)}-\frac{3\times(a^2+1)}{(b^2+1)\times(a^2+1)}$$
$$=\frac{3(b^2+1)-3(a^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)}$$
$$=\frac{3b^2+3-3a^2-3}{(a^2+1)(b^2+1)}=\frac{3(b^2-a^2)}{(a^2+1)(b^2+1)}$$
$$=\frac{3(b+a)(b-a)}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

2. a. Soient $a,b\in[0;+\infty[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\frac{3(b+a)(b-a)}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

On sait que $a<b$ donc $a-a<b-a$ soit $0<b-a$

On sait que $a>0$ et $b>0$ donc $a+b>0$

On sait que $a^2>0$ et $b^2>0$

donc $a^2+1>0$ et $b^2+1>0$

→ AINSI $\dfrac{3(b+a)(b-a)}{(a^2+1)(b^2+1)}>0$ → $\dfrac{(+)\times(+)}{(+)\times(+)}=(+)$

→ AINSI $f(a)-f(b)>0$ soit $f(a)>f(b)$

Si $a<b$ implique $f(a)>f(b)$, alors la fonction f **est décroissante** sur $[0;+\infty[$.

b. Soient $a,b\in]-\infty;0]$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\frac{3(b+a)(b-a)}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

On sait que $a<b$ donc $a-a<b-a$ soit $0<b-a$

On sait que $a<0$ et $b<0$ donc $a+b<0$

On sait que $a^2>0$ et $b^2>0$

donc $a^2+1>0$ et $b^2+1>0$

→ AINSI $\dfrac{3(b+a)(b-a)}{(a^2+1)(b^2+1)}<0$ → $\dfrac{(-)\times(+)}{(+)\times(+)}=(-)$

→ AINSI $f(a)-f(b)<0$ soit $f(a)-f(b)<0$

Si $a<b$ implique $f(a)-f(b)<0$, alors la fonction f **est croissante** sur $]-\infty;0]$.

3. <u>Tableau de variation</u> de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↗		↘	

EXERCICE 5A.11

Soit la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par : $f(x)=x^3-3x$.

1. Soit a et b deux réels tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\left(a^3-3a\right)-\left(b^3-3b\right)=a^3-3a-b^3+3b=a^3-b^3-3a+3b$$

Or si l'on développe la factorisation proposée, on obtient :

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2-3\right)=a^3+a^2b+ab^2-3a-ba^2-ab^2-b^3+3b=a^3-3a-b^3+3b$$

AINSI $f(a)-f(b)=(a-b)\left(a^2+ab+b^2-3\right)$

2. A l'aide des propriétés des inégalités, déterminer le signe de $\left(a^2+ab+b^2-3\right)$ dans les cas suivants :

a. a > 1 et **b > 1** $a^2>1$; $b^2>1$; $ab>1$ d'où $a^2+ab+b^2>3$ et $a^2+ab+b^2-3>0$	**b. $0\le a\le 1$** et **$0\le b\le 1$** $a^2<1$; $b^2<1$; $ab<1$ d'où $a^2+ab+b^2<3$ et $a^2+ab+b^2-3<0$	**c. $-1\le a\le 0$** et **$-1\le b\le 0$** $a^2<1$; $b^2<1$; $ab<1$ d'où $a^2+ab+b^2<3$ et $a^2+ab+b^2-3<0$	**d. a < –1** et **b < –1** $a^2>1$; $b^2>1$; $ab>1$ d'où $a^2+ab+b^2>3$ et $a^2+ab+b^2-3>0$

3. Compléter le tableau suivant : $a<b$ donc $a-b<0$

a et b	$a<b<-1$	$-1\le a<b\le 0$	$0\le a<b\le 1$	$1<a<b$
$a-b$	–	–	–	–
a^2+ab+b^2-3	+	–	–	+
$f(a)-f(b)$	–	+	+	–

Bilan :

Soient $a,b\in]-\infty;-1]$ tels que $a<b$: $f(a)-f(b)<0$: la fonction f **est croissante** sur $]-\infty;-1]$.

Soient $a,b\in[-1;1]$ tels que $a<b$: $f(a)-f(b)>0$: la fonction f **est décroissante** sur $]-\infty;-1]$.

Soient $a,b\in[1;+\infty[$ tels que $a<b$: $f(a)-f(b)<0$: la fonction f **est croissante** sur $[1;+\infty[$.

4. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f		↗		↘		↗	