Chapitre 5 ~ Équations de droites & systèmes

I – Équations de droites

1. Droites et équations

Propriété

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère dans lequel se trouve une droite (d).
- **Si (d) est parallèle à l'axe des ordonnées, alors (d) : $x = c$, où $c \in \mathbb{R}$.**
- **Sinon, une équation de (d) : $y = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.**

On choisit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points distincts sur cette droite (d). Alors $M(x ; y) \in (d)$ est équivalent à dire que $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}(x - x_A ; y - y_A)$. D'après un critère vu au chapitre 3, cela revient à écrire que $(x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$. On note $(\mathcal{E})$ cette équation.

Distinguons alors deux cas :
- <u>(d) est parallèle à l'axe des ordonnées</u> : dans ce cas, $x_A = x_B$, et $(\mathcal{E})$ se réduit à $(y_B - y_A)(x - x_A) = 0$. Cette équation équivaut encore à $x - x_A = 0$ car $y_B \neq y_A$ (les points A et B étant distincts). On donc bien la forme annoncée, avec $c = x_A$.
- <u>(d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées</u> : alors $x_A \neq x_B$, et on peut écrire :

$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Leftrightarrow y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x_A + y_A$.

En posant $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $b = -\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x_A + y_A$, on arrive au résultat annoncé.

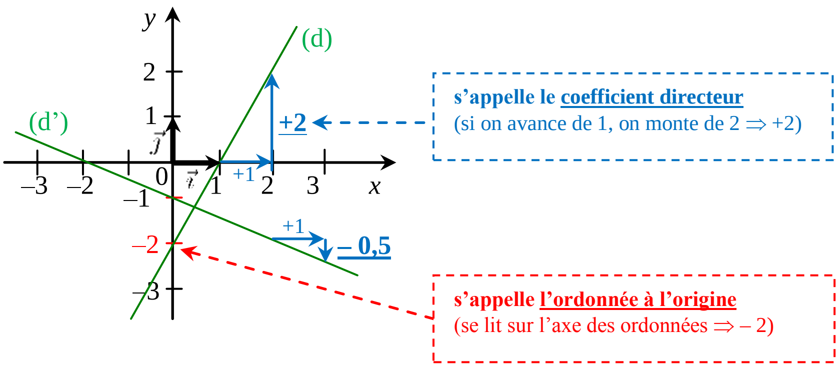
Une conséquence immédiate de cette propriété :

Propriété

Si (d) est une droite et $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B) \in (d)$ deux points distincts, alors le coefficient directeur de (d) est

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exemple : Sur la figure suivante, représenter la droite (d'') d'équation x = – 2.



La droite (d) a pour équation y = 2x – 2 : son coefficient directeur est 2 et son ordonnée à l'origine – 2.
La droite (d')a pour équation y = ……x …… : son coefficient directeur est …… et son ordonnée à l'origine …… .

À l'inverse, la propriété suivante sera admise :

Propriété

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère et $a, b, c \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points M vérifiant $x = c$ ou $y = ax + b$ forme une droite.

	En classe :	Exercices :
	1, 3, 4, 5 p. 201 + 11 p. 202	2, 6, 7 p. 201 + 12 p. 202

2. Vecteur directeur

Définition

Soit (d) une droite. Un <u>vecteur directeur</u> de cette droite est un vecteur de même direction que (d), quelque soient son sens et sa norme.

Propriété

Soit (d) une droite représentée dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
- **Si (d) est parallèle à l'axe des ordonnée, alors $\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de (d).**
- **Sinon, le vecteur $\vec{u}(1 ; a)$ est un vecteur directeur de (d).**

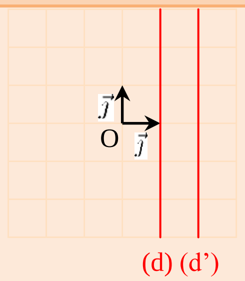
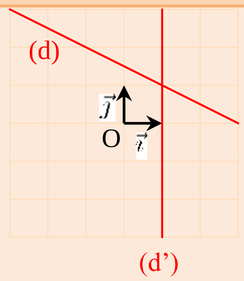
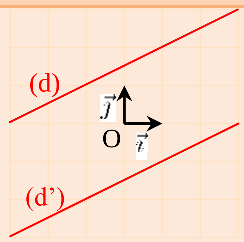
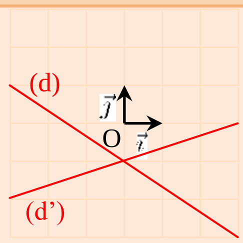
Distinguons les deux cas :
- <u>(d) est parallèle à l'axe des ordonnées</u> : alors le vecteur $\vec{\jmath}$ est de même direction que (d) et en est donc un vecteur directeur.
- <u>(d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées</u> : une équation de la droite (d) est y = ax + b. Elle contient donc les deux points choisis A(0 ; b) et B(1 ; a + b). On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: (1 – 0 ; a + b – b) = (1 ; a), qui est un vecteur directeur de la droite (d).

Exemple : Un vecteur directeur de la droite (d) de l'exemple précédent est (1 ; …). Un autre vecteur directeur peut être (2 ; …) ou encore (– 4 ; ……).

	En classe :	**Exercices :**
	23 (utiliser propriété p. 20), 25 p. 203	**24 (utiliser propriété p. 20), 26 p. 203**

3. Droites parallèles & sécantes

Nous allons pouvoir faire la synthèse dans le tableau suivant :

Équation de (d)	$x = c$	$y = ax + b$	$y = ax + b$	
Équation de (d')	$x = c'$	$x = c$	$y = cx + d$	
Position relative entre les deux droites	(d) // (d')	(d) et (d') sont sécantes	si $a = a'$, (d) // (d')	si $a \neq a'$, (d) et (d') sont sécantes
Représentations graphiques				

	En classe :	**Exercices :**
	28, 29 p. 203	**30 p. 203**

II – Lien avec les systèmes d'équations

1. Définition

Définition

Soient *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et *f* six nombres relatifs quelconques. On appelle <u>système de deux équations</u> de degré 1 et d'inconnues x et y les deux équations liées $ax + by = c$ et $dx + ey = f$. On note ce système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Résoudre un système de deux d'équations à deux inconnues revient à trouver tous les couples de nombres (x ; y) tels qu'ils vérifient simultanément les deux équations. Chacun de ces couples est alors appelé solution du système.

Remarques

- Chacune des deux équations est une équation de degré 1 à deux mêmes inconnues : x et y ; ces équations sont donc liées !
- Lorsqu'on aura trouvé la solution, l'ordre des solutions est important : x d'abord, y ensuite…
- On est sûr qu'un système possède une unique solution lorsque son **déterminant** $ae - bd$ est non nul.

2. Droites et systèmes

Nous constatons qu'en remplaçant les deux équations ci-dessus par deux équations de droites (d) : $y = ax + b$ et (d') : $y = cx + d$, on obtient aussi un système de deux équations à deux inconnues. Trois cas sont alors à distinguer :

Le système $\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$ admet…

…1 unique solution	…0 solution	…une infinité de solutions
Le couple (x ; y) vérifiant le système donne les coordonnées du point d'intersection.	Les deux droites (d) et (d') ne se touchent pas, elles sont alors parallèles.	Les droites (d) et (d') se coupent une infinité de fois. Seule possibilité : elles sont confondues.

Exemples :

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & L_1 \\ -2x - y = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 & L_1 \\ 3y = 0 & L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0. \end{cases}$$

Les droites $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ et $y = -2x$ se coupent au point P(0 ; 3).

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3 & L_1 \\ -2x - y = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 & L_1 \\ 0 = 3 & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \end{cases}$$

Puisque la seconde équation est impossible, ce système n'admet pas de solution.

Les droites $y = -\frac{4}{2}x + \frac{3}{2} = -2x + 1{,}5$ et $y = -2x$ sont effectivement parallèles (même coefficient directeur).

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2 & L_1 \\ -2x - y = -1 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2 & L_1 \\ 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \end{cases}$$

Puisque la seconde équation est toujours vérifiée, ce système admet une infinité de solutions : tout couple (x ; y) vérifiant $4x + 2y = 2$.

Ces équations traduisent la même équation de droite : $y = -2x + 1$. Elles sont donc bien confondues.

	En classe :	Exercices :
	33, 36 p. 204 + 44, 50 p. 205	34, 37, 39 p. 204 + 45, 46, 51 p. 205

3. Autre utilité des systèmes

Les systèmes peuvent aussi être utilisés pour déterminer une équation d'une droite passant par deux points dont les coordonnées sont connues. On va par exemple déterminer l'équation de la droite passant par les points A(– 4 ; – 1) et B(1 ; 1,5).

Cette droite admet pour le moment comme équation $y = ax + b$, et on cherche a et b. On sait qu'elle passe par deux points précis, on peut donc écrire le système suivant, puis le résoudre :

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -4a + b \\ 1{,}5 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -4a + b \\ 2{,}5 = 5a \ (L2 \leftarrow L2 - L1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0{,}5 \\ b = 1. \end{cases}$$

La droite recherchée admet donc pour équation $y = 0{,}5x + 1$.

	En classe :	Exercices :
	13 p. 202	18, 19 p. 202