CORRIGE – LA MERCI

EXERCICE 8B.1 On considère les points A(-1 ; 4), B(3 ; 1), C(7 ; -2) et D(-6 ; -8).

AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(3-(-1))^2+(1-4)^2}=\sqrt{(3+1)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

AC = $\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(7-(-1))^2+(-2-4)^2}=\sqrt{(7+1)^2+(-6)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$

AD = $\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}=\sqrt{(-6-(-1))^2+(-8-4)^2}=\sqrt{(-6+1)^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

EXERCICE 8B.2 On considère les points A(1 ; 5), B(3 ; 8) et C(9 ; 4).

AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(8-5)^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

AC = $\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(9-1)^2+(4-5)^2}=\sqrt{8^2+(-1)^2}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$

BC = $\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(9-3)^2+(4-8)^2}=\sqrt{6^2+(-4)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$

Ainsi : $AC^2=65$, $AB^2=13$ et $BC^2=52$ donc $AC^2=AB^2+BC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est **rectangle** en B.

EXERCICE 8B.3 On considère les points A(-1 ; 1), B(1 ; 1) et C(0 ; 1 + $\sqrt{3}$).

AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-(-1))^2+(1-1)^2}=\sqrt{2^2+0^2}=2$

AC = $\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(0-(-1))^2+(1+\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$

BC = $\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(1+\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$

Ainsi : $AB=AC=BC=2$: le triangle ABC est **équilatéral**.

EXERCICE 8B.4 On considère les points A(-1 ; 3), B(1 ; 6) et C(4 ; 4).

AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-(-1))^2+(6-3)^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

AC = $\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(4-(-1))^2+(4-3)^2}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$

BC = $\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-6)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

Ainsi : $AB^2=13$, $AC^2=26$ et $BC^2=13$ donc $AC^2=AB^2+BC^2$; de plus : $AB=BC$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est **rectangle** et **isocèle** en B.

EXERCICE 8B.5 On considère les points A(-1 ; 2), B(0 ; 4), C(2 ; 5) et D(1 ; 3).

AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(0-(-1))^2+(4-2)^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

BC = $\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(5-4)^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

CD = $\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2}=\sqrt{(1-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

AD = $\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}=\sqrt{(1-(-1))^2+(3-2)^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

Ainsi : $AB=BC=CD=DA$: le quadrilatère ABCD est un **losange**.

De plus : AC = $\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(2-(-1))^2+(5-2)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$

Donc $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$: ce losange n'est pas un carré.

EXERCICE 8B.6 On considère les points A(-3 ; 5), B(-4 ; 7), C(-6 ; 6) et D(-5 ; 4).

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4-(-3))^2 + (7-5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-6-(-4))^2 + (6-7)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

CD = $\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(-5-(-6))^2 + (4-6)^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

AD = $\sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(-5-(-3))^2 + (4-5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

Ainsi : $AB = BC = CD = DA$: le quadrilatère ABCD est un **losange**.

De plus : AC = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-6-(-3))^2 + (6-5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ce losange possède un angle droit : **ABCD est un carré**.

EXERCICE 8B.7 On considère les points A(-1 ; 2), B(1 ; 2), C(3 ; -1) et D(-3 ; -1).
Démontrer que ABCD est un trapèze isocèle.

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 1-(-1) \\ 2-2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{vmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{vmatrix} -3-3 \\ -1-(-1) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{vmatrix} -6 \\ 0 \end{vmatrix}$

Ainsi : $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$: ABCD est un **trapèze** ayant deux cotés parallèles.

BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

AD = $\sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

Ainsi : $BC = AD$: ABCD est **un trapèze isocèle**.

EXERCICE 8B.8

1. On considère un triangle ABC rectangle en A.
D'après la relation de Pythagore pour ce triangle : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

2. a. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$

(Remarque : puisque le triangle est rectangle en A, on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**).

b. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: ainsi : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$

c. $AB^2 = x^2 + y^2$, $AC^2 = x'^2 + y'^2$ et $BC^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 = x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2$

L'égalité de Pythagore devient : $x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$
soit : $-2xx' - 2yy' = 0$
d'où : $xx' + yy' = 0$

On retiendra la propriété suivante :

$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \textbf{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \textbf{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0}$

EXERCICE 8B.9 Dans chaque cas, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

→ $4\times3+(-2)\times6=0$: **OUI**

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$

→ $1\times(-4)+(-4)\times(-1)=0$: **OUI**

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

→ $6\times1+(-3)\times2=0$: **OUI**

d. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$

→ $5\times3+(-2)\times7=1$: **NON**

e. $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\15\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

→ $-6\times5+15\times(-2)=-30$: **NON**

f. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\0\end{pmatrix}$

→ $0\times11+(-7)\times0=0$: **OUI**

g. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\-10\end{pmatrix}$

→ $4\times(-5)+(-2)\times(-10)=0$: **OUI**

h. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

→ $3\times(-6)+(-9)\times(-2)=0$: **OUI**

i. $\vec{u}\begin{pmatrix}35\\14\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

→ $35\times(-2)+14\times5=0$: **OUI**

EXERCICE 8B.10 Refaire les exercices **8B.2**, **8B.4** et **8B.6** en utilisant le critère d'orthogonalité.

EXERCICE 8B.2 On considère les points A(1 ; 5), B(3 ; 8) et C(9 ; 4).

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}3-1\\8-5\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix}9-3\\4-8\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix}6\\-4\end{matrix}\right.$

$2\times6+3\times(-4)=0$: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, le triangle ABC est rectangle en B.

EXERCICE 8B.4 On considère les points A(-1 ; 3), B(1 ; 6) et C(4 ; 4).

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}1-(-1)\\6-3\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix}x_C-x_A\\y_C-y_B\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix}4-1\\4-6\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right.$

$2\times3+3\times(-2)=0$: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, le triangle ABC est rectangle en B.

EXERCICE 8B.6 On considère les points A(-3 ; 5), B(-4 ; 7), C(-6 ; 6) et D(-5 ; 4).

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}-4-(-3)\\7-5\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix}-6-(-4)\\6-7\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{CD}\left|\begin{matrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\left|\begin{matrix}-5-(-6)\\4-6\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix}x_D-x_A\\y_D-y_A\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix}-5-(-3)\\4-5\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}\right.$

$-1\times(-2)+2\times(-1)=0$: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux

$(-2)\times1+(-1)\times(-2)=0$: $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux

$1\times(-2)+(-2)\times(-1)=0$: $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux

→Un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle.

$\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}-6-(-3)\\6-5\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}-3\\1\end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{BD}\left|\begin{matrix}x_D-x_B\\y_D-y_B\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\left|\begin{matrix}-5-(-4)\\4-7\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\left|\begin{matrix}-1\\-3\end{matrix}\right.$

$(-3)\times(-1)+1\times(-3)=0$: $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux

→Un rectangle ayant des diagonales perpendiculaires est un carré donc ABCD est un carré.