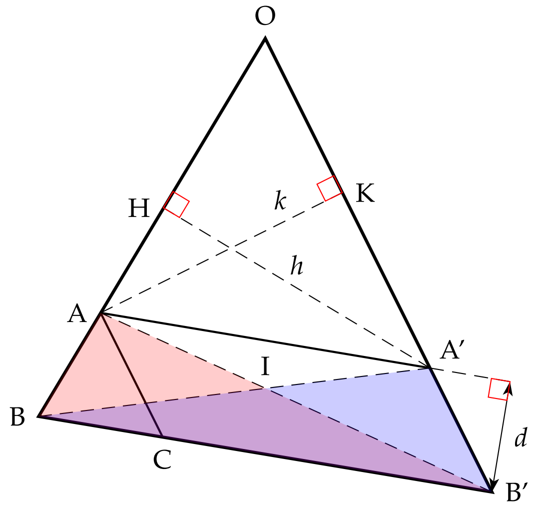
Démonstration du théorème de Thalès

- Soient deux droites (AB) et (A′B′) sécantes en O telles que (AA′) // (BB′).
- Soit I l'intersection des droites (A′B) et (B′A).
- Soient les droites (A′H) et (AK) respectivement perpendiculaires aux droites (OB) et (OB′).
- Soit d la distance entre les droites (AA′) et (BB′)
- On rappelle l'aire d'un triangle :

$$\mathscr{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$



1) **Montrons que les aires des triangles AIB et A′IB′ sont égales**

Le quadrilatère ABB′A′ est un trapèze car les droites (AA′) et (BB′) sont parallèles.

On considère les triangles AB′B (en rouge) et A′BB′ (en bleu). Ces deux triangles ont une base commune [BB′] et une même hauteur associée d (hauteur du trapèze). Ces deux triangles ont donc la même aire :

$$\mathscr{A}_{\text{AB'B}} = \mathscr{A}_{\text{A'BB'}} \quad (1)$$

or les triangles AIB et BIB′ d'une part, A′IB′ et BIB′ d'autre part partionnent les triangles respectifs AB′B et A′BB′. La relation (1) devient alors :

$$\mathscr{A}_{\text{AIB}} + \mathscr{A}_{\text{BIB'}} = \mathscr{A}_{\text{A'IB'}} + \mathscr{A}_{\text{BIB'}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{A}_{\text{AIB}} = \mathscr{A}_{\text{A'IB'}}$$

2) **Montrons la première égalité du théorème de Thalès :**

- Les triangles OAA′ et OBA′ ont un même hauteur $\text{A'H} = h$. On a alors les aires suivantes

$$\mathscr{A}_{\text{OAA'}} = \frac{\text{OA} \times h}{2} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_{\text{OBA'}} = \frac{\text{OB} \times h}{2}$$

On en déduit le rapport de ces deux aires : $\dfrac{\mathscr{A}_{\text{OAA'}}}{\mathscr{A}_{\text{OBA'}}} = \dfrac{\text{OA}}{\text{OB}}$ (2)

- Les triangles OAA′ et OAB′ ont un même hauteur $\text{AK} = k$. On a alors les aires suivantes

$$\mathscr{A}_{\text{OAA'}} = \frac{\text{OA'} \times k}{2} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_{\text{OAB'}} = \frac{\text{OB'} \times k}{2}$$

On en déduit le rapport de ces deux aires : $\dfrac{\mathscr{A}_{\text{OAA'}}}{\mathscr{A}_{\text{OAB'}}} = \dfrac{\text{OA'}}{\text{OB'}}$ (3)

- D'après l'égalité (1)

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{A}_{\text{OBA}'} = \mathscr{A}_{\text{OAA}'} + \mathscr{A}_{\text{AIA}'} + \mathscr{A}_{\text{AIB}} \\ \mathscr{A}_{\text{OAB}'} = \mathscr{A}_{\text{OAA}'} + \mathscr{A}_{\text{AIA}'} + \mathscr{A}_{\text{A}'\text{IB}'}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathscr{A}_{\text{OBA}'} = \mathscr{A}_{\text{OAB}'}$$

- Les rapports (2) et (3) sont alors égaux, donc : $\dfrac{\text{OA}}{\text{OB}} = \dfrac{\text{OA}'}{\text{OB}'}$

3) **Montrons la dernière égalité du théorème Thalès**

Menons en A la parallèle à (OB′), elle coupe (BB′) en C.

On peut utiliser la première égalité du théorème de thalès dans les triangles BAC et BOB′ car (AC) // (OB′). On obtient alors :

$$\frac{\text{BA}}{\text{BO}} = \frac{\text{BC}}{\text{BB}'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{BO-AO}}{\text{BO}} = \frac{\text{BB}'\text{-CB}'}{\text{BB}'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{AO}}{\text{BO}} = \frac{\text{CB}'}{\text{BB}'} \quad (4)$$

Comme (AA′) // (BB′) et (AC) // (A′B′) le quadrilatère ACB′A′ est un parallélogramme donc : $\text{CB}' = \text{AA}'$

Le rapport (4) vaut donc : $\dfrac{\text{OA}}{\text{OB}} = \dfrac{\text{AA}'}{\text{BB}'}$