CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. QUET

Exercice 1

(5 points)

1 - Si $x<2$ alors $-4x>-8$ **Vrai** : on multiplie des termes d'une inéquation par un nombre négatif

2 - Si $x>3$ alors $-2x<-6$ **Vrai** : pour la même raison

3 - Si $x<-5$ alors $x^2>25$ **Vrai** : si $x<-5$ alors $|x|>+5$, donc $x^2>25$

4 - Si $-3<x<4$ alors $9<x^2<25$ **Faux** : $0\in[-2;3]$ et $0^2=0$ or $0^2\notin[9;25]$

5 - Si $x<3$ alors $x^2<9$ **Faux** : car $-5<3$ et $(-5)^2=25$ or $(-5)^2>9$

6 - Si $x>4$ alors $\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$ **Vrai** : on change le sens de l'inéquation en inversant les termes

7 - Si $-3<x<0$ alors $-\frac{1}{3}>\frac{1}{x}$ **Vrai** : les signes de l'inéquation changent

8 - Les carrés des nombres positifs sont rangés dans le même ordre que ces nombres

Vrai : pour tous nombres positifs a et b : si $a<b$ alors $a^2<b^2$

9 - Les inverses des nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de ces nombres.

Vrai : pour tous nombres positifs a et b : si $a<b$ alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

10- Les inverses de deux nombres de signes contraires sont rangés dans l'ordre contraire de ces nombres.

Faux : soit $a<0$ et $b>0$ alors $a<b$, et $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ car $\frac{1}{a}$ est négatif.

Exercice 2

(5 points)

Soit $f: x\mapsto -5x^2+3$

a) Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ tels que $u<v$

Alors : $f(u)-f(v)=\left(-5u^2+3\right)-\left(-5v^2+3\right)=-5u^2+3+5v^2-3=5\left(v^2-u^2\right)=5(v+u)(v-u)$

$u>0$ et $v>0$ donc $v+u>0$; comme $u<v$ alors $v-u>0$; **ainsi** $f(u)-f(v)>0$

La fonction f : $x\mapsto -5x^2+3$ est décroissante sur $[0;+\infty[$.

b) Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $]-\infty;0]$ tels que $u<v$

De même $f(u)-f(v)>0=5(v+u)(v-u)$

$u<0$ et $v<0$ donc $v+u<0$; comme $u<v$ alors $v-u>0$; **ainsi** $f(u)-f(v)<0$

La fonction f : $x\mapsto -5x^2+3$ est croissante sur $]-\infty;0]$.

c) $f(x)=3-5x^2$, or $x^2\geq 0$ donc $-5x^2\leq 0$ et $-5x^2+3\leq 3$: ainsi 3 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

d) On trace la courbe représentative de la fonction f, puis la droite horizontale d'équation $y=1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-42	-17	-2	3	-2	-17	-42

On trouve 2 points d'intersection d'abscisses comprises l'une entre $-0{,}7$ et $-0{,}6$, l'autre entre 0,6 et 0,7

Par le calcul, il faut résoudre : $-5x^2+3=1$, soit $-5x^2=-2$; soit $x^2=\frac{2}{5}$ ou $x^2-\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=0$

Ceci donne : $\left(x+\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)=0$: deux solutions : $\frac{\sqrt{10}}{5}$ *et* $-\frac{\sqrt{10}}{5}$, avec $\frac{\sqrt{10}}{5}\approx 0{,}63$

e) Graphiquement $f(x)>1$ si $x\in]-0{,}6;0{,}6[$

Par le calcul, il faut résoudre : $-5x^2+3>1$, soit $-5x^2>-2$; soit $x^2<\frac{2}{5}$ ou $x^2-\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2<0$

On utilise un tableau de signes pour résoudre Ceci donne : $\left(x+\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)<0$:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{10}}{5}$		$\frac{\sqrt{10}}{5}$		$+\infty$
$x+\frac{\sqrt{10}}{5}$	$-$		$+$		$+$	
$x-\frac{\sqrt{10}}{5}$	$-$		$-$		$+$	
$\left(x+\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)$	$+$		$-$		$+$	

Ainsi $\left(x+\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)<0$ si $x\in\left]-\frac{\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right[$, soit $f(x)>1$ si $x\in\left]-\frac{\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right[$.

Exercice 3

(7 points)

Soit f : $x\mapsto\frac{3x-5}{x-1}$

a) Il faut que x soit différent de 1 pour que le dénominateur soit non nul.

$3-\frac{2}{x-1}=3\times\frac{x-1}{x-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3x-3-2}{x-1}=\frac{3x-5}{x-1}=f(x)$ pour tout réel x différent de 1.

b) Etude sur $]-\infty;1]$: Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $]-\infty;1]$ tels que $u<v$

$$f(u)-f(v)=\left(3-\frac{2}{u-1}\right)-\left(3-\frac{2}{v-1}\right)=-\frac{2}{u-1}+\frac{2}{v-1}=\frac{-2(v-1)+2(u-1)}{(u-1)(v-1)}=\frac{-2v+2+2u-2}{(u-1)(v-1)}$$

soit $f(u)-f(v)=\frac{2(u-v)}{(u-1)(v-1)}$

Comme $v<1$ et $u<1$ alors $v-1<0$ et $u-1<0$, donc $(u-1)(v-1)>0$;

Par hypothèse $u<v$ alors $u-v<0$; ainsi $f(u)-f(v)<0$: ***f* est croissante sur** $]-\infty;1]$

Sur l'intervalle $[1;+\infty[$: Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$ tels que $u<v$

De même : $f(u)-f(v)=\frac{2(u-v)}{(u-1)(v-1)}$

Comme $v>1$ et $u>1$ alors $v-1>0$ et $u-1>0$, donc $(u-1)(v-1)>0$;

Par hypothèse $u<v$ alors $u-v<0$; ainsi $f(u)-f(v)<0$: ***f* est croissante sur** $[1;+\infty[$

c) Si $x>2$ alors $x-1>1$, et $\frac{1}{x-1}<\frac{1}{1}$ soit $\frac{1}{x-1}<1$. Alors $-2\times\frac{1}{x-1}>-2\times1$, soit $\frac{-2}{x-1}>-2$

On obtient : $\frac{-2}{x-1}+3>-2+3$, soit $f(x)>1$

d) *f* est croissante sur $[1;+\infty[$ donc *f* est aussi croissante sur l'intervalle $[5;10]$.

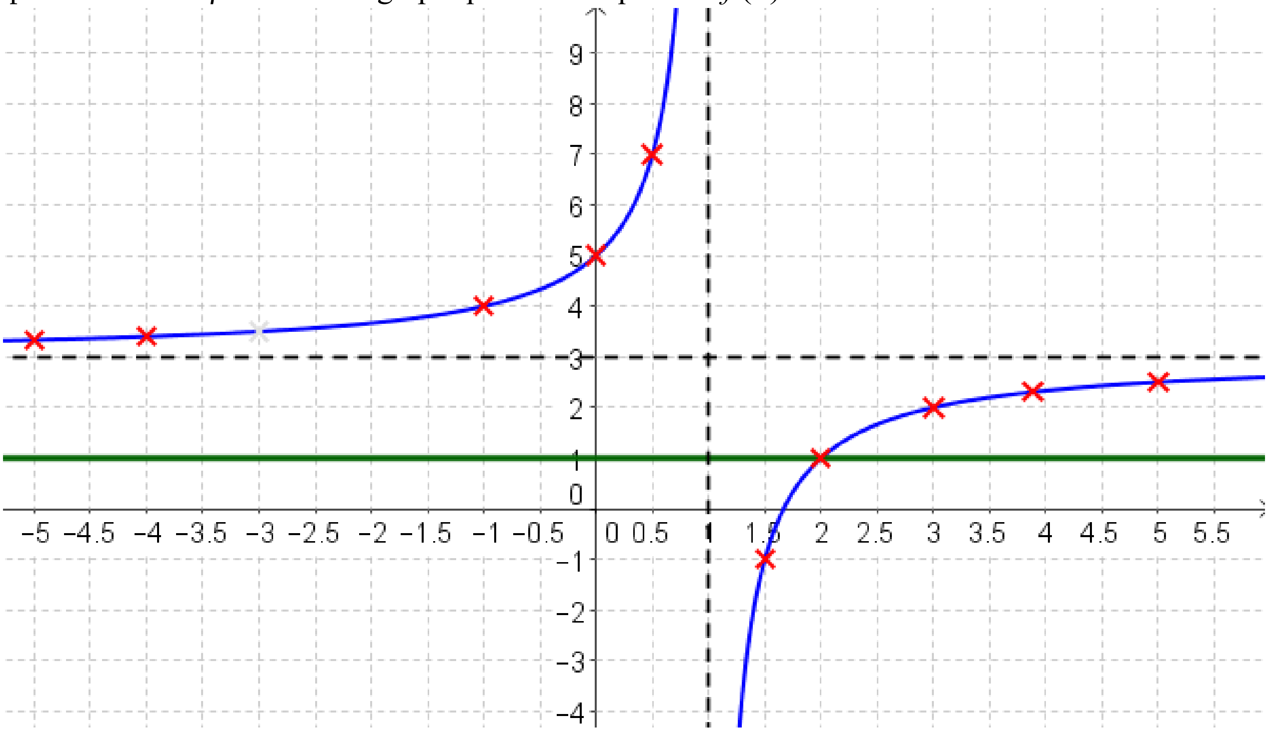
Le minimum de *f* est $f(5)=\frac{3\times5-5}{5-1}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$, son maximum est $f(10)=\frac{3\times10-5}{10-1}=\frac{25}{9}$

Donc si $x\in[5;10]$, $\frac{5}{2}\le f(x)\le\frac{25}{9}$

e) Pour tracer la courbe représentant la fonction *f* , on peut réaliser un tableau de valeur :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	$0{,}5$	$0{,}9$	$1{,}5$	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{10}{3}$	$3{,}4$	$3{,}5$	$\frac{11}{3}$	4	5	7	23	0	1	2	$\frac{8}{3}$	$2{,}5$

f) On trace la droite horizontale d'équation y = 1 pour regarder les intersections avec la courbe représentative de *f* et résoudre graphiquement l'équation $f(x)=1$ → on trouve *x* = 2.



Par le calcul : $f(x)=1$ revient à : $\dfrac{3x-5}{x-1}=1$, soit : $3x-5=(x-1)\times 1$, d'où : $3x-5=x-1$

On obtient : $3x-x=5-1$, soit $2x=4$ et $x=2$

g) Graphiquement $f(x)>1$ si $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

Par le calcul : $f(x)>1$ revient à : $\dfrac{3x-5}{x-1}>1$, soit $\dfrac{3x-5}{x-1}-1>0$, d'où : $\dfrac{3x-5}{x-1}-\dfrac{x-1}{x-1}>0$

On obtient : $\dfrac{3x-5-x+1}{x-1}>0$, soit : $\dfrac{2x-4}{x-1}>0$ ou $\dfrac{2(x-2)}{x-1}>0$

On utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
$x-1$		$-$	$\Vert$	$-$		$+$	
$\dfrac{2(x-2)}{x-1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$\dfrac{2(x-2)}{x-1}>0$ si $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

On retrouve le même résultat : $f(x)>1$ si $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

Exercice 4

(3 points)

Soit f : $x\mapsto -2(x-3)^2+6$

d) Etude sur $\left]-\infty;3\right]$: Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $\left]-\infty;3\right]$ tels que $u<v$

$$f(u)-f(v)=\left(-2(u-3)^2+6\right)-\left(-2(v-3)^2+6\right)=-2(u-3)^2+2(v-3)^2=2\left[(v-3)^2-(u-3)^2\right]$$

Ainsi : $f(u)-f(v)=2[(v-3)+(u-3)][(v-3)-(u-3)]=2(u+v-6)(v-u)$

Comme $v<3$ et $u<3$ alors $u+v<6$ donc $u+v-6<0$;

Par hypothèse $u<v$ alors $v-u>0$; **ainsi** $f(u)-f(v)<0$: **f est croissante sur** $]-\infty;3]$

Etude sur $[3;+\infty[$: Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $[3;+\infty[$ tels que $u<v$

De même : $f(u)-f(v)=2(u+v-6)(v-u)$

Comme $v>3$ et $u>3$ alors $u+v>6$ donc $u+v-6>0$;

Par hypothèse $u<v$ alors $v-u>0$; ainsi $f(u)-f(v)>0$: **f est décroissante sur** $[3;+\infty[$

e) Le maximum d'une fonction est la plus petite valeur M telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\leq M$

Ainsi, comme $(x-3)^2\geq 0$, alors $-2(x-3)^2\leq 0$ et $-2(x-3)^2+6\leq 0+6$, soit $f(x)\leq 6$

Le maximum de *f* sur $\mathbb{R}$ est 6.

f) Soit g : $x\mapsto 8x-10$: la représentation graphique de la fonction g est une droite passant par les points $A(1;-2)$ *car* $g(1)=-2$ et $B(2;6)$ *car* $g(2)=6$.

Pour tracer la fonction *f*, il faut faire un tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-44	-26	-12	-2	4	6	4	-2	-12	-26	-44

La droite représentant la fonction g est tangente à la courbe représentant f au point $A(1;-2)$.

Par le calcul, il faut résoudre $f(x)=g(x)$, soit $-2(x-3)^2+6=8x-10$

En développant : $-2\left(x^2-6x+9\right)+6=8x-10$, soit : $-2x^2+12x-18+6-8x+10=0$

On obtient : $-2x^2+4x-2=0$, soit : $-2\left(x^2-2x+1\right)=0$, qui s'écrit aussi : $-2(x-1)^2=0$

La solution est $x=1$, et $f(1)=g(1)=-2$: on retrouve le point $A(1;-2)$