CORRIGE - La Merci – *Montpellier*

Exercice 1 : $\dfrac{(2+x)^2(3-x)}{1-4x}\leq 0$ $\quad\rightarrow$valeur interdite : $1-4x\neq 0 \iff x\neq \dfrac{1}{4}$

$(2+x)^2>0 \quad ; \quad 3-x>0 \iff -x>-3 \iff x<3 \quad ; \quad 1-4x>0 \iff -4x>-1 \iff x<\dfrac{1}{4}$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{4}$		3		$+\infty$
$(1+x)^2$		+	0	+	|	+	|	+	
$5-x$		+	|	+	|	+	0	$-$	
$1-2x$		+	|	+	0	$-$	|	$-$	
Q		+	0	+	||	$-$	0	+	

$$S=\{-2\}\cup\left]\frac{1}{4};3\right]$$

Exercice 2 : $\dfrac{x-1}{x+1}>2$ $\quad\rightarrow$valeur interdite : $x+1\neq 0 \iff x\neq -1$

$$\frac{x-1}{x+1}>2 \iff \frac{x-1}{x+1}-2>0 \iff \frac{x-1}{x+1}-\frac{2(x+1)}{x+1}>0 \iff \frac{x+1-2(x+1)}{x+1}>0$$

$$\iff \frac{x-1-2x-2}{x+1}>0 \iff \frac{-x-3}{x+1}>0$$

$-x-3>0 \iff -x>3 \iff x<-3 \quad ; \quad x+1>0 \iff x>-1$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$-x-3$		+	0	$-$	|	$-$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	+	
Q		$-$	0	+	||	$-$	

$$S=\left]-3;-1\right[$$

$\dfrac{-5x+3}{2x+1}\geq 2$ $\rightarrow$valeur interdite : $2x+1\neq 0 \iff x\neq -\dfrac{1}{2}$

$$\frac{-5x+3}{2x+1}\geq 2 \iff \frac{-5x+3}{2x+1}-2\geq 0 \iff \frac{-5x+3}{2x+1}-\frac{2(2x+1)}{2x+1}\geq 0 \iff \frac{-5x+3-2(2x+1)}{2x+1}\geq 0$$

$$\iff \frac{-5x+3-4x-2}{2x+1}\geq 0 \iff \frac{-9x+1}{2x+1}\geq 0$$

$-9x+1>0 \iff -9x>-1 \iff x<\dfrac{1}{9} \quad ; \quad 2x+1>0 \iff 2x>-1 \iff x>-\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{9}$		$+\infty$
$-9x+1$		+	|	+	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	+	|	+	
Q		$-$	||	+	0	$-$	

$$S=\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{9}\right]$$

Exercice 3 : $(2x-1)^2 > (x+3)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2-(x+3)^2>0 \Leftrightarrow [(2x-1)+(x+3)][(2x-1)-(x+3)]>0$

$\Leftrightarrow [2x-1+x+3][2x-1-x-3]>0 \Leftrightarrow (3x+2)(x-4)>0$

$3x+2>0 \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x>-\dfrac{2}{3}$; $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$+$	0	$+$	
Q		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S = \left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup]4;+\infty[$$

$(2-x)(3+x)<2(3-2x)(2-x) \Leftrightarrow (2-x)(3+x)-2(3-2x)(2-x)<0 \Leftrightarrow (2-x)[(3+x)-2(3-2x)]<0$

$\Leftrightarrow (2-x)[3+x-6+4x]<0 \Leftrightarrow (2-x)(5x-3)<0$

$2-x>0 \Leftrightarrow -x>-2 \Leftrightarrow x<2$; $5x-3>0 \Leftrightarrow 5x>3 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{5}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
Q		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S = \left]-\infty;\frac{3}{5}\right[\cup]2;+\infty[$$

Exercice 4 : $\dfrac{4-x}{8-x} \le \dfrac{1-3x}{2+x}$: les valeurs interdites sont 8 et –2.

$\dfrac{4-x}{8-x} \le \dfrac{1-3x}{2+x} \Leftrightarrow \dfrac{4-x}{8-x}-\dfrac{1-3x}{2+x} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(4-x)\times(2+x)}{(8-x)\times(2+x)}-\dfrac{(1-3x)\times(8-x)}{(2+x)\times(8-x)} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{8+4x-2x-x^2}{(8-x)(2+x)}-\dfrac{8-x-24x+3x^2}{(2+x)(8-x)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{8+4x-2x-x^2-8+x+24x-3x^2}{(8-x)(2+x)} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{27x-4x^2}{(8-x)(2+x)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(27-4x)}{(8-x)(2+x)} \le 0$

$27-4x>0 \Leftrightarrow -4x>-27 \Leftrightarrow x<\dfrac{27}{4}$; $8-x>0 \Leftrightarrow -x>-8 \Leftrightarrow x<8$; $2+x>0 \Leftrightarrow x>-2$

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{27}{4}$		8		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$27-4x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$8-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Q		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$$S = \left]-2;0\right] \cup \left[\frac{27}{4};8\right[$$

$\frac{2x+3}{x+1} \geq \frac{x+3}{2x+1}$: les valeurs interdites sont –1 et –0,5.

$$\frac{2x+3}{x+1} \geq \frac{x+3}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1} - \frac{x+3}{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+3)(2x+1)}{(x+1)(2x+1)} - \frac{(x+3)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(4x^2+2x+6x+3\right)-\left(x^2+x+3x+3\right)}{(x+1)(2x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+2x+6x+3-x^2-x-3x-3}{(x+1)(2x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+4x}{(x+1)(2x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(3x+4)}{(x+1)(2x+1)} \geq 0$$

$3x+4>0 \Leftrightarrow 3x>-4 \Leftrightarrow x>-\frac{4}{3}$; $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$; $2x+1>0 \Leftrightarrow 2x>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		–	|	–	|	–	|	–	0	+	
$3x+4$		–	0	+	|	+	|	+	|	+	
$x+1$		–	|	–	0	+	|	+	|	+	
$2x+1$		–	|	–	|	+	0	+	|	+	
Q		+	0	–	||	+	||	–	0	+	

$$S = \left]-\infty;-\frac{4}{3}\right] \cup \left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup [0;+\infty[$$

Exercice 5 : Proposer une inéquation à résoudre sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des solutions est $]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$

Le tableau de variation est inversé, recherchez la solution la plus simple :

→les crochets sont ouverts : strictement supérieur ou strictement inférieur à 0

→cela ressemble à un produit de deux facteurs P_1 et P_2

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$P_1 \times P_2$		+	0	–	0	+	
P_1		–	|	–	0	+	
P_2		–	0	+	0	+	

On peut proposer : $(x-2)(x-4)>0$

BONUS :

Résoudre : $\frac{\left(x^{16}+4x^2+9\right)(5x-3)^2(x-2)^2}{x-2}<0$

Précisez d'abord la valeur interdite : 2

→$(5x-3)^2 \geq 0$

→ $(x-2)^2 \geq 0$

→ $x^{16} = \left(x^8\right)^2$ donc $x^{16} \geq 0$ et de même $4x^{12} \geq 0$ d'où : $x^{16} + 4x^{12} + 9 \geq 0$

Ce quotient est donc du signe du dénominateur : $S = \left]-\infty ; 2\right[$

Résoudre : $x^3 \leq x^2$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-1) \leq 0$

Or $x^2 \geq 0$ pour tout réel x

Donc la solution est donnée par : $x-1 \leq 0$ soit $x \leq 1$

$S = \left]-\infty ; 1\right]$