CORRIGE – La Merci (Montpellier)

Exercice 1 :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

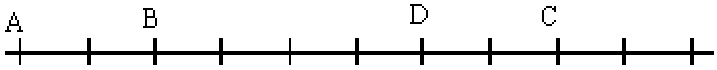
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AC}+\vec{0}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CB}$

$2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CA}=2\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$

Exercice 2 :



$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{DA}=-3\,\overrightarrow{AB}$

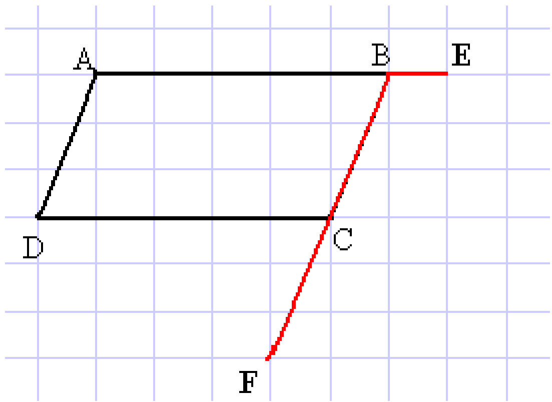
$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BD}=-2\,\overrightarrow{CD}$

Exercice 3 :

ABCD est un parallélogramme.

Construire les points E et F définis par : $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BF}=2\,\overrightarrow{AD}$.



Exercice 4 :

On considère les points A(1; 3), B(–2 ; 1) et C(0 ; –4).

1. ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B-x_A=x_C-x_D \\ y_B-y_A=y_C-y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-1=0-x_D \\ 1-3=-4-y_D \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3=-x_D \\ -2+4=-y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=3 \\ y_D=-2 \end{cases}$ → D(3 ; –2)

2. E est le symétrique de A par rapport à C $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C-x_A=x_E-x_C \\ y_C-y_A=y_E-y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0-1=x_E-0 \\ -4-3=y_E+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1=x_E \\ -7-4=y_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E=-1 \\ y_E=-11 \end{cases}$ → E(–1; –11)

3. Les segments [FD] et [BC] ont même milieu $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_F+x_D}{2}=\dfrac{x_B+x_C}{2} \\ \dfrac{y_F+y_D}{2}=\dfrac{y_B+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F+x_D=x_B+x_C \\ y_F+y_D=y_B+y_C \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_F+3=-2+0 \\ y_F-2=1-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F=-2-3 \\ y_F=-3+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F=-5 \\ y_F=-1 \end{cases}$ → F(–5; –1)

Exercice 5 :

1. $\vec{u}\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{7}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{7}\right)$ → déterminant : $\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{7}\right)-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{4}{7}\right)=-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=0$

   donc les deux vecteurs sont colinéaires et $\vec{v}=\frac{3}{4}\vec{u}$

2. $\vec{u}\left(1-\sqrt{2};1\right)$ et $\vec{v}\left(1+\sqrt{2};-1\right)$ → déterminant : $\left(1-\sqrt{2}\right)\times(-1)-1\times\left(1+\sqrt{2}\right)=-1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-2$

   donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

3. $\vec{u}\left(\sqrt{3}+1;2\right)$ et $\vec{v}\left(-1;1-\sqrt{3}\right)$ → déterminant : $\left(\sqrt{3}+1\right)\times\left(1-\sqrt{3}\right)-2\times(-1)=1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2+2=1-3+2=0$

   donc les deux vecteurs sont colinéaires et $\vec{u}=-\left(\sqrt{3}+1\right)\vec{u}$

Exercice 6 : On donne les points : A(0; 3), B(9, –3), C(–3; 5), $D\left(7;-\frac{3}{2}\right)$ et $E\left(-1;\frac{11}{3}\right)$

1. Les points A, B et C sont ils alignés ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, ainsi : $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$: ces deux vecteurs sont colinéaires et les droites (AB) et (AC) sont parallèles ; A est un point commun à ces deux droites donc les points A, B et C sont alignés.

2. Les points A, B et D sont ils alignés ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}7\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$ → déterminant : $9\times\left(-\frac{9}{2}\right)-(-6)\times7=-\frac{81}{2}+42=-\frac{81}{2}+\frac{84}{2}=\frac{3}{2}$

Ainsi les deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et D ne sont pas alignés.

3. Les points A, B et E sont ils alignés ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ → déterminant : $9\times\frac{2}{3}-(-6)\times(-1)=6-6=0$:

ces deux vecteurs sont colinéaires et les droites (AB) et (AE) sont parallèles ; A est un point commun à ces deux droites donc les points A, B et E sont alignés.

Exercice 7 : On donne les points : A $(4;-5)$ et B $(-9;-3)$

1. Deux méthodes pour calculer AB :

AB = $\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(-9-4)^2+(-3+5)^2}=\sqrt{(-13)^2+(+2)^2}=\sqrt{169+4}=\sqrt{173}$

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{matrix}\right.$ → $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}-9-4\\-3+5\end{matrix}\right.$, d'où $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}-13\\2\end{matrix}\right.$ et **AB** = $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-13)^2+(+2)^2}=\sqrt{169+4}=\sqrt{173}$

2. I milieu de [AB] :

$$\mathbf{I}\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \to \mathbf{I}\left(\frac{4-9}{2};\frac{-5-3}{2}\right) \to \mathbf{I}\left(\frac{-5}{2};-4\right)$$