

CORRIGE – La Merci - Montpellier

Exercice 1 : QCM : → Si la réponse est FAUX, donner un contre exemple ou la bonne réponse.

- 1) \mathbb{Z} s'appelle l'ensemble des entiers naturels. → **FAUX** : \mathbb{Z} ensemble des entiers relatifs.
- 2) \mathbb{N} s'appelle l'ensemble des entiers relatifs. → **FAUX** : \mathbb{N} ensemble des entiers naturels.
- 3) \mathbf{D} l'ensemble des nombres pouvant s'écrire: $\frac{a}{10^n}$ avec a entier relatif et n entier naturel. → **VRAI**
- 4) \mathbb{Q} l'ensemble des nombres pouvant s'écrire : $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier naturel non nul → **VRAI**
- 5) \mathbb{Q} est inclus dans \mathbf{D} . → **FAUX** : $\mathbf{D} \subset \mathbb{Q}$
- 6) Un nombre irrationnel s'écrit à l'aide d'une racine. → **FAUX** : $\pi \in \mathbb{R}$
- 7) « Un nombre entier naturel est un nombre premier » signifie qu'il admet exactement 2 diviseurs entiers naturels : 1 et lui-même. → **VRAI**

Exercice 2 : Simplifier au max ces nombres, et donner le plus petit ensemble auquel ils appartiennent.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{24,6}{10,8} &= \frac{246}{108} = \frac{2 \times 3 \times 41}{2 \times 3 \times 18} = \frac{41}{18} \in \mathbb{Q} & \text{b) } \frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{40}} &= \frac{\sqrt{4 \times 2 \times 7}}{2\sqrt{4 \times 2 \times 5}} = \frac{2\sqrt{2 \times 7}}{2 \times 2\sqrt{2 \times 5}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{2\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} \in \mathbb{R} \\
 \text{c) } \frac{15}{25} - \frac{2}{15} &= \frac{3 \times 5}{5 \times 5} - \frac{2}{15} = \frac{3}{5} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} - \frac{2}{15} = \frac{7}{15} \in \mathbb{Q} & \text{d) } \frac{21-7\pi}{33-11\pi} &= \frac{7 \times 3 - 7\pi}{11 \times 3 - 11\pi} = \frac{7(3-\pi)}{11(3-\pi)} = \frac{7}{11} \in \mathbb{Q} \\
 \text{e) } 3(3\sqrt{3}-\sqrt{48})^2 &= 3(3\sqrt{3}-\sqrt{16 \times 3})^2 = 3(3\sqrt{3}-4\sqrt{3})^2 = 3(-\sqrt{3})^2 = 3 \times 3 = 9 \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Exercice 3 :

$$\begin{aligned}
 \text{3) a) } 234 &= 2 \times 3^2 \times 13 & 180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 & \text{b) } G &= \frac{234}{180} = \frac{2 \times 3^2 \times 13}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{13}{2 \times 5} = \frac{13}{10} \\
 \text{c) } H &= \frac{\sqrt{234} \times \sqrt{5}}{\sqrt{13} \times \sqrt{180}} = \frac{\sqrt{2 \times 3^2 \times 13} \times \sqrt{5}}{\sqrt{13} \times \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5}} = \frac{3\sqrt{2 \times 13} \times \sqrt{5}}{\sqrt{13} \times 2 \times 3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{13}}{\sqrt{13} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \text{4) } I &= \frac{35}{63} + \frac{2}{27} - \frac{51}{34} = \frac{7 \times 5}{7 \times 9} + \frac{2}{27} - \frac{17 \times 3}{17 \times 2} = \frac{5}{9} + \frac{2}{27} - \frac{3}{2} = \frac{6 \times 5}{54} + \frac{2 \times 2}{54} - \frac{27 \times 3}{54} = \frac{30+4-81}{54} = \frac{30+4-81}{54} = \frac{-47}{54} \\
 J &= \frac{\sqrt{288} + \sqrt{162}}{\sqrt{98}} = \frac{\sqrt{2^5 \times 3^2} + \sqrt{2 \times 3^4}}{\sqrt{2 \times 49}} = \frac{2^2 \times 3\sqrt{2} + 3^2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2} + 9\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{21\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{21}{7} = 3
 \end{aligned}$$

Exercice 4 : Faites une étude graphique

$$\begin{aligned}
 \text{a) } [2;5] \cap [3;12] &= [3;5] & \text{b) } [2;5] \cup [3;12] &= [2;12] & \text{c) }]-\infty;3] \cap [-5;10] &= [-5;3] \\
 \text{d) }]-\infty;3] \cup [-5;10] &=]-\infty;10] & \text{e) } \mathbb{R}_-^* \cap \mathbb{R}_+ &= \emptyset & \text{f) } \mathbb{R}_-^* \cap \mathbb{R}_+ &= \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[
 \end{aligned}$$

Exercice 5 : Compléter le tableau suivant :

INTERVALLE	INEGALITE(S)	REPRESENTATION GRAPHIQUE	CET INTERVALLE SE LIT	intervalle borné ou non borné ?
$]-5; -0,5]$	$-5 < x \leq -0,5$		intervalle semi-ouvert de -5 à -0,5	borné
$[-3; +\infty[$	$-3 \leq x < +\infty$		intervalle semi-ouvert de -3 à +\infty	non borné
$]-\infty; -4[$	$-\infty < x < -4$		intervalle ouvert de $-\infty$ à 4	non borné
$[-3; 6[$	$-3 \leq x < 6$		intervalle semi-ouvert de -3 à 6	borné

Exercice 6 :

1. Développer puis réduire:

$$A = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 3\left(x^2 - \frac{1}{9}\right) = 3x^2 - \frac{1}{3}$$

$$B = 8(x-1) - 7(1-x^2)(2x-3) = 8x - 8 - 7(2x-3-2x^3+3x^2) = 8x - 8 - 14x + 21 + 14x^3 - 21x^2$$

$$B = 14x^3 - 21x^2 - 6x + 13$$

$$C = (3x+1)(x-2) - (2x-3)^2 = (3x^2 - 6x + x - 2) - (2x-3)(2x-3)$$

$$C = (3x^2 - 5x - 2) - (4x^2 - 6x - 6x + 9) = 3x^2 - 5x - 2 - 4x^2 + 6x + 6x - 9 = -x^2 + 7x - 11$$

2. Factoriser au maximum:

$$D = (x+2)(6x-3) - (1-2x)^2 = (x+2) \times 3(2x-1) - (2x-1)^2 = (2x-1)[(x+2) \times 3 - (2x-1)]$$

$$D = (2x-1)[3x+6-2x+1] = (2x-1)(x+7)$$

$$E = x^2(x+1) - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2 - 1)$$

$$F = (10x-5)(x+2) + (1-x)(2x-1) = 5 \times (2x-1)(x+2) + (1-x)(2x-1) \dots$$

$$F = (2x-1)[5 \times (x+2) + (1-x)] = (2x-1)(5x+10+1-x) = (2x-1)(4x+11)$$

On considère l'équation suivante : $\frac{4}{x+5} = \frac{1}{x-5}$

1. Cette équation existe si $x+5 \neq 0$ et $x-5 \neq 0$, soit si : $x \neq -5$ et $x \neq 5$

2. Produit en croix (sans oublier les parenthèses) :

$$4 \times (x-5) = 1 \times (x+5), \text{ soit : } 4x - 20 = x + 5$$

$$\text{Ainsi : } 3x = 25 \text{ donc } x = \frac{25}{3}$$

Exercice 7 :

Soit x et y deux réels tels que : $-2 \leq x \leq 3$ et $-5 \leq y \leq 6$

1) encadrer $\frac{1}{x-y}$ \rightarrow valeurs interdites : il faut que $x-y \neq 0$ soit $x \neq y$

$$-5 \leq y \leq 6 \text{ donc } 5 \geq -y \geq -6 \text{ soit } -6 \leq -y \leq 5$$

$$\text{Ainsi : } -2-6 \leq x-y \leq 3+5 \text{ soit } -8 \leq x-y \leq 8$$

$$\text{Si } -8 \leq x-y < 0 \text{ alors } \frac{1}{-8} \geq \frac{1}{x-y} > -\infty \text{ soit } -\infty < \frac{1}{x-y} < -\frac{1}{8}$$

$$\text{Si } 0 < x-y \leq 8 \text{ alors } +\infty \geq \frac{1}{x-y} > \frac{1}{8} \text{ soit } \frac{1}{8} < \frac{1}{x-y} < +\infty$$

2) encadrer $x^2 \times y$

$$\text{Si } -2 \leq x \leq 0 \text{ alors } (-2)^2 \geq x^2 \geq 0^2 \text{ soit } 0 \leq x^2 \leq 4$$

$$\text{Si } 0 \leq x \leq 3 \text{ alors } 0^2 \leq x^2 \leq 3^2 \text{ soit } 0 \leq x^2 \leq 9$$

$$\text{Donc si } -2 \leq x \leq 3 \text{ alors } 0 \leq x^2 \leq 9$$

$$\text{Si } -5 \leq y \leq 0 \text{ alors } 9 \times (-5) \leq x^2 \times y \leq 9 \times 0 \text{ soit } -45 \leq x^2 \times y \leq 0$$

$$\text{Si } 0 \leq y \leq 6 \text{ alors } 9 \times 0 \leq x^2 \times y \leq 9 \times 6 \text{ soit } 0 \leq x^2 \times y \leq 54$$

$$\text{AINSI : si } -2 \leq x \leq 3 \text{ et } -5 \leq y \leq 6 \text{ alors } -45 \leq x^2 \times y \leq 54$$

Exercise 8 :

$$A = \frac{(-49)^5 \times 14^8 \times (-35)^3}{(-42^4) \times (-10)^6} - \frac{(-50)^5 \times 7^3 \times (-50^4)}{(-25)^5 \times (-2^6)} = \frac{-49^5 \times 14^8 \times (-35^3)}{(-42^4) \times 10^6} - \frac{(-50^5) \times 7^3 \times (-50^4)}{(-25^5) \times (-2^6)}$$

$$A = \frac{-49^5 \times 14^8 \times 35^3}{42^4 \times 10^6} - \frac{50^5 \times 7^3 \times 50^4}{25^5 \times 2^6} = \frac{(7^2)^5 \times (7 \times 2)^8 \times (7 \times 5)^3}{(7 \times 2 \times 3)^4 \times (5 \times 2)^6} - \frac{(5^2 \times 2)^5 \times 7^3 \times (5^2 \times 2)^4}{(5^2)^5 \times 2^6}$$

$$A = -\frac{7^{10} \times 7^8 \times 2^8 \times 7^3 \times 5^3}{7^4 \times 2^4 \times 3^4 \times 5^6 \times 2^6} - \frac{(5^2)^5 \times 2^5 \times 7^3 \times (5^2)^4 \times 2^4}{5^{10} \times 2^6} = -\frac{7^{21} \times 2^8 \times 5^3}{7^4 \times 2^{10} \times 3^4 \times 5^6} - \frac{\boxed{5^{10}} \times 2^9 \times 7^3 \times 5^8}{\boxed{5^{10}} \times 2^6}$$

$$A = -\frac{7^{17}}{2^2 \times 3^4 \times 5^3} - 2^3 \times 7^3 \times 5^8 = \frac{-7^{17} \times 5^3 - 2^3 \times 7^3 \times 5^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 5^3}{2^2 \times 3^4 \times 5^3} = \frac{-5^3 \times 7^{17} - 2^5 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^3}{2^2 \times 3^4}$$

Exercise 9 :

Soit n un entier naturel non nul

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} - \frac{2n(n+2)}{(n+1)n(n+2)} + \frac{n(n+1)}{(n+2)n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + n + 2}{n(n+1)(n+2)} - \frac{2n^2 + 4n}{n(n+1)(n+2)} + \frac{n^2 + n}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + n + 2 - (2n^2 + 4n) + (n^2 + n)}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + n + 2 - 2n^2 - 4n + n^2 + n}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$2) \text{ D'après le 1), on a : } \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{4 \times 5 \times 6} + \dots + \frac{1}{30 \times 31 \times 32} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{29} - \frac{2}{30} + \frac{1}{31} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{30} - \frac{2}{31} + \frac{1}{32} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{29} - \frac{2}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{30} - \frac{2}{31} + \frac{1}{32} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{29} - \frac{2}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{31} - \frac{2}{31} + \frac{1}{32} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{31} - \frac{2}{31} + \frac{1}{32} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{31} + \frac{1}{32} \right) \end{aligned}$$