Corrigé du brevet des collèges septembre 2009
Métropole La Réunion Mayotte

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES — 12 points

Exercice 1

$\dfrac{1\,404}{3\,465} = \dfrac{3 \times 468}{3 \times 1\,155} = \dfrac{468}{1\,155}$

Cette fraction n'est pas irréductible car les deux nombres 468 et 1 155 sont tous les deux divisibles par 3 :

$\dfrac{468}{1\,155} = \dfrac{3 \times 156}{3 \times 385} = \dfrac{156}{385}$

Exercice 2

Pour un tirage au hasard, on a placé dans une urne 25 boules de même taille, les unes blanches, les autres noires. La probabilité de tirer une boule blanche est 0,32.

S'il y avait autant de boules blanches que noires, la probabilité de tirer une boule blanche serait de 0,5 ; la probabilité de tirer une boule blanche est inférieure à 0,5 donc il y a moins de boules blanches que de boules noires dans l'urne.

Exercice 3

La recette pour fabriquer une boisson sucrée, demande de mélanger 3 doses de sirop avec 5 doses d'eau.

Sur un total de 8 doses, il y a 3 doses de sirop ; il faut donc $\dfrac{3}{8}$ de sirop dans le mélange.

$\dfrac{3}{8} \times 6 = 2,25$; il faut donc 2,25 litres de sirop pour faire 6 litres de mélange.

Exercice 4

On propose deux programmes de calcul :

Programme A	Programme B
— Choisir un nombre	— Choisir un nombre
— Multiplier ce nombre par 3	— Multiplier ce nombre par 5
— Ajouter 7	— Retrancher 4
	— Multiplier par 2

1. On choisit 3 comme nombre de départ.

   On applique le programme B.

Choisir un nombre :	3
Multiplier ce nombre par 5 :	$3 \times 5 = 15$
Retrancher 4 :	$15 - 4 = 11$
Multiplier par 2 :	$11 \times 2 = 22$

   Le résultat du programme B est 22.

2. On choisit (-2) comme nombre de départ.

   On applique le programme A.

Choisir un nombre :	-2
Multiplier ce nombre par 3 :	$3 \times (-2) = -6$
Ajouter 7 :	$-6 + 7 = 1$

   Le résultat du programme A est 1.

3. **a.** On cherche le nombre de départ pour que le programme A donne pour résultat -2.

On effectue le programme A par la fin.

Quel nombre faut-il prendre pour qu'en ajoutant 7 on obtienne -2 ?
Il suffit de soustraire 7 à -2 donc c'est -9.

Quel nombre faut-il prendre pour qu'en multipliant par 3 on obtienne -9 ?
Il suffit de diviser par 3 le nombre -9 et on obtient -3.

En partant de -3, on obtient -2 avec le programme A.

b. On cherche le nombre de départ pour que le programme B donne pour résultat 0.

On procède comme à la question précédente :

On choisit le nombre :	0
On divise par 2 :	$0/2 = 0$
On ajoute 4 :	$0+4=4$
On divise par 5 :	$4/5 = 0,8$

Pour obtenir 0 avec le programme B, il faut partir de 0,8.

4. On applique les programmes A et B à un nombre quelconque que l'on appelle x.

Programme A		Programme B	
Choisir un nombre :	x	Choisir un nombre :	x
Multiplier ce nombre par 3 :	$3x$	Multiplier ce nombre par 5 :	$5x$
Ajouter 7 :	$3x+7$	Retrancher 4 :	$5x-4$
		Multiplier par 2 :	$2(5x-4)$

On veut obtenir le même résultat avec les deux programmes.
Il faut donc trouver x pour que $3x+7 = 2(5x-4)$.

On résout l'équation :	$3x+7 = 2(5x-4)$
	$3x+7 = 10x-8$
On retranche $3x$ aux deux membres :	$7 = 7x-8$
On ajoute 8 aux deux membres :	$15 = 7x$
On divise les deux membres par 7 :	$\dfrac{15}{7} = x$

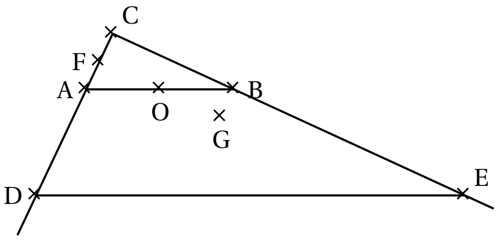
Le nombre que l'on doit choisir pour obtenir le même résultat avec les deux programmes est $\dfrac{15}{7}$.

Vérification

Programme A	Choisir un nombre :	$\dfrac{15}{7}$
	Multiplier ce nombre par 3 :	$3\times\dfrac{15}{7} = \dfrac{45}{7}$
	Ajouter 7 :	$\dfrac{45}{7}+7 = \dfrac{45}{7}+\dfrac{49}{7} = \boxed{\dfrac{94}{7}}$
Programme B	Choisir un nombre :	$\dfrac{15}{7}$
	Multiplier ce nombre par 5 :	$5\times\dfrac{15}{7} = \dfrac{75}{7}$
	Retrancher 4 :	$\dfrac{75}{7}-4 = \dfrac{75}{7}-\dfrac{28}{7} = \dfrac{47}{7}$
	Multiplier par 2 :	$2\times\dfrac{47}{7} = \boxed{\dfrac{94}{7}}$

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES 12 points

Exercice 1

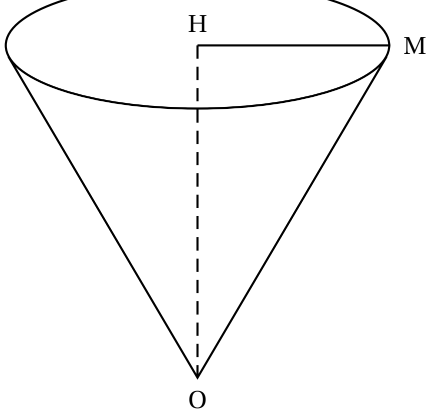


Données de la figure ci-contre :

- CDE est un triangle rectangle en C
- A appartient au segment [CD], B appartient au segment [CE] et la droite (AB) est parallèle à la droite (DE).
- Le point F est le milieu du segment [AC] et le point O est le milieu de [AB].
- Le point G est le symétrique de F par rapport à O.
- DE = 12 cm ; AB = 4,5 cm et AC = 1,8 cm

1. D'après le texte, G est le symétrique de F par rapport à O ; donc O est le milieu de [FG].
   D'après le texte, on sait que O est le milieu de [AB].
   Le quadrilatère AFBG a donc ses diagonales [FG] et [AB] qui ont le même milieu O, donc le quadrilatère AFBG est un parallélogramme.
2. Dans le triangle ABC, F est le milieu de [AC] et O est le milieu de [AB]. Donc, d'après le théorème des milieux, on peut dire que les droites (FO) et (CB) sont parallèles.
3. D'après le texte, on sait que A appartient au segment [CD], B appartient au segment [CE] et la droite (AB) est parallèle à la droite (DE)
   On peut donc appliquer le théorème de Thalès aux triangles CDE et CAB : $\dfrac{\text{CD}}{\text{CA}} = \dfrac{\text{DE}}{\text{AB}}$
   On sait que AC = $1{,}8$, DE = 12 et AB = $4{,}5$.
   Donc $\dfrac{\text{CD}}{1{,}8} = \dfrac{12}{4{,}5}$ et donc CD = $\dfrac{1{,}8 \times 12}{4{,}5} = 4{,}8$ cm
4. Dans le triangle ABC rectangle en C, $\cos\widehat{\text{BAC}} = \dfrac{\text{AC}}{\text{AB}}$.
   D'après le texte : AC = $1{,}8$ et AB = $4{,}5$; donc $\cos\widehat{\text{BAC}} = \dfrac{1{,}8}{4{,}5}$
   On trouve à la calculatrice : $\widehat{\text{BAC}} \approx 66°$

Exercice 2

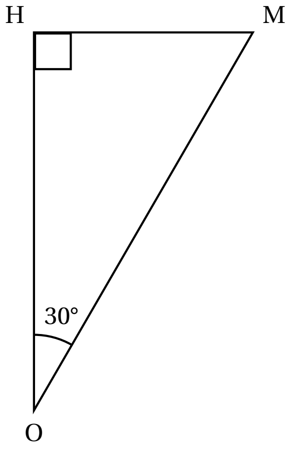


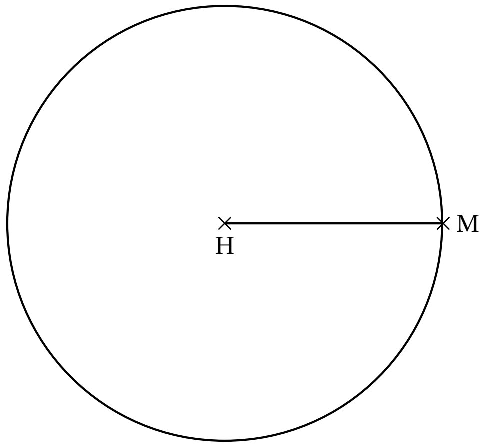
La figure ci-contre représente un cône de révolution d'axe (OH).

- OH = 5 cm
- l'angle $\widehat{\text{HOM}}$ mesure 30°.

1. On dessine le triangle HOM en vraie grandeur ; voir ci-dessous.

2. On dessine la base du cône en vraie grandeur ; voir ci-dessous.



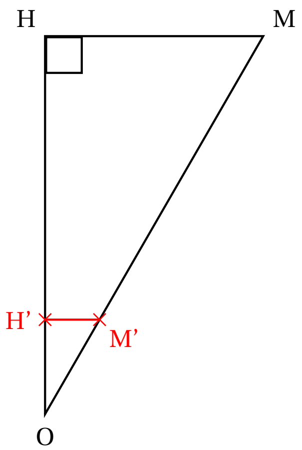


3. Le triangle OHM est rectangle en H donc $\tan\widehat{\text{HOM}} = \dfrac{\text{HM}}{\text{OH}}$ donc $\text{HM} = \tan\widehat{\text{HOM}} \times \text{OH}$

$\widehat{\text{HOM}} = 30°$ donc $\tan\widehat{\text{HOM}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; on sait que OH = 5 cm.

On en déduit que $\text{HM} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2,9$ cm.

4. On verse de l'eau dans le cône jusqu'au quart de sa hauteur.



On appelle h = OH la hauteur du cône et r = HM le rayon de sa base. Son volume est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3} \times$ aire de la base × hauteur, autrement dit $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

On appelle h' = OH' la hauteur de l'eau dans le cône et r' = H'M' le rayon de la base du cône formé par l'eau.

D'après le texte, $h' = \dfrac{h}{4}$. D'après le théorème de Thalès dans les triangles OH'M' et OHM, on peut dire que $r' = \dfrac{r}{4}$.

Le volume du cône formé par l'eau est

$V' = \dfrac{1}{3}\pi r'^2 h' = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{r}{4}\right)^2\left(\dfrac{h}{4}\right) = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{r^2}{16} \times \dfrac{h}{4} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\pi r^2 h}{64} = \dfrac{V}{64}$

Donc $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{64}$ ce qui fait $\dfrac{100}{64} = 1,5625\,\%$

L'eau occupe donc 1,562 5 % du volume total du cône.

PROBLÈME 12 points

Partie I : Format d'un rectangle

Sur la feuille annexe 1, cinq rectangles sont dessinés. Pour chacun, la longueur et la largeur sont indiquées. L'unité est le mm.

1. On complète le tableau de la feuille annexe 2.
2. Cette écriture irréductible de la fraction $\dfrac{L}{\ell}$ obtenue pour chaque rectangle est appelée format du rectangle.
   a. Les rectangles du tableau qui ont le même format que le 1 sont les rectangles 4 et 5.
   b. Le rectangle du tableau qui a le même format que le rectangle 2 est le rectangle 3.
3. Un rectangle est au format $\dfrac{16}{9}$.
   a. La largeur de ce rectangle est 54 mm.
   Sa longueur L vérifie $\dfrac{L}{54} = \dfrac{16}{9}$ donc $L = \dfrac{54 \times 16}{9} = 96$ mm
   b. Voir annexe 1.
   c. Pour un rectangle de format $\dfrac{16}{9}$, on a $\dfrac{L}{\ell} = \dfrac{16}{9}$ autrement dit : $9L = 16\ell$

Partie II : Étude graphique

À chaque rectangle de longueur L et de largeur ℓ, on associe sur le graphique de la feuille annexe 2, le point de coordonnées $(\ell\,;\,L)$.
Les points P_1 et P_2 correspondant aux deux premiers rectangles sont déjà placés.

1. On place les trois autres points : voir annexe 2.
2. Les points correspondant aux rectangles dont le format est $\dfrac{16}{9}$ semblent appartenir à la droite $(\text{O}P_1)$.
3. On considère un rectangle de largeur ℓ et de longueur L dont le format est $\dfrac{16}{9}$.
   On appelle M le point du graphique correspondant à ce rectangle.
   Le point M a pour abscisse x_M qui est la largeur du rectangle, et pour ordonnée y_M qui en est sa longueur. Comme ce rectangle est de format $\dfrac{16}{9}$, on sait que $\dfrac{y_M}{x_M} = \dfrac{16}{9}$ donc $y_M = \dfrac{16}{9}x_M$.
   Le point M appartient donc à la droite représentant la fonction linéaire qui à x associe $\dfrac{16}{9}x$.
   La droite $(\text{O}P_1)$ passe par O donc elle est la représentation graphique d'une fonction linéaire qui à x associe mx. Elle passe par le point P_1 de coordonnées $(18\,,32)$; donc l'image de 18 est 32 donc $32 = m \times 18$ donc $m = \dfrac{16}{9}$.
   Donc la droite $(\text{O}P_1)$ est la représentation graphique de la fonction qui à x associe $\dfrac{16}{9}x$.
   On a vu que le point M appartenait à cette droite donc M appartient à la droite $(\text{O}P_1)$.

Partie III : Étude graphique : diagonale des rectangles

Les écrans de télévision sont des rectangles qui sont en général au format $\dfrac{16}{9}$ ou $\dfrac{4}{3}$. Les fabricants indiquent souvent, comme caractéristique de la taille de l'écran, la longueur de sa diagonale.

1. Le rectangle 1 a pour dimensions 18 sur 32 ; on calcule sa diagonale en appliquant le théorème de Pythagore : $18^2 + 32^2 = 324 + 1\,024 = 1\,348$; la diagonale mesure donc $\sqrt{1\,348} \approx 37$ cm

2. Pour les écrans de télévision au format $\dfrac{16}{9}$, les fabricants considèrent que la longueur de la diagonale vaut approximativement le double de la largeur.

   La diagonale d'un rectangle de dimensions L et ℓ et de format $\dfrac{16}{9}$ vaut : $\Delta = \sqrt{L^2 + \ell^2}$

   Mais $\dfrac{L}{\ell} = \dfrac{16}{9}$ donc $L = \dfrac{16}{9} \times \ell$

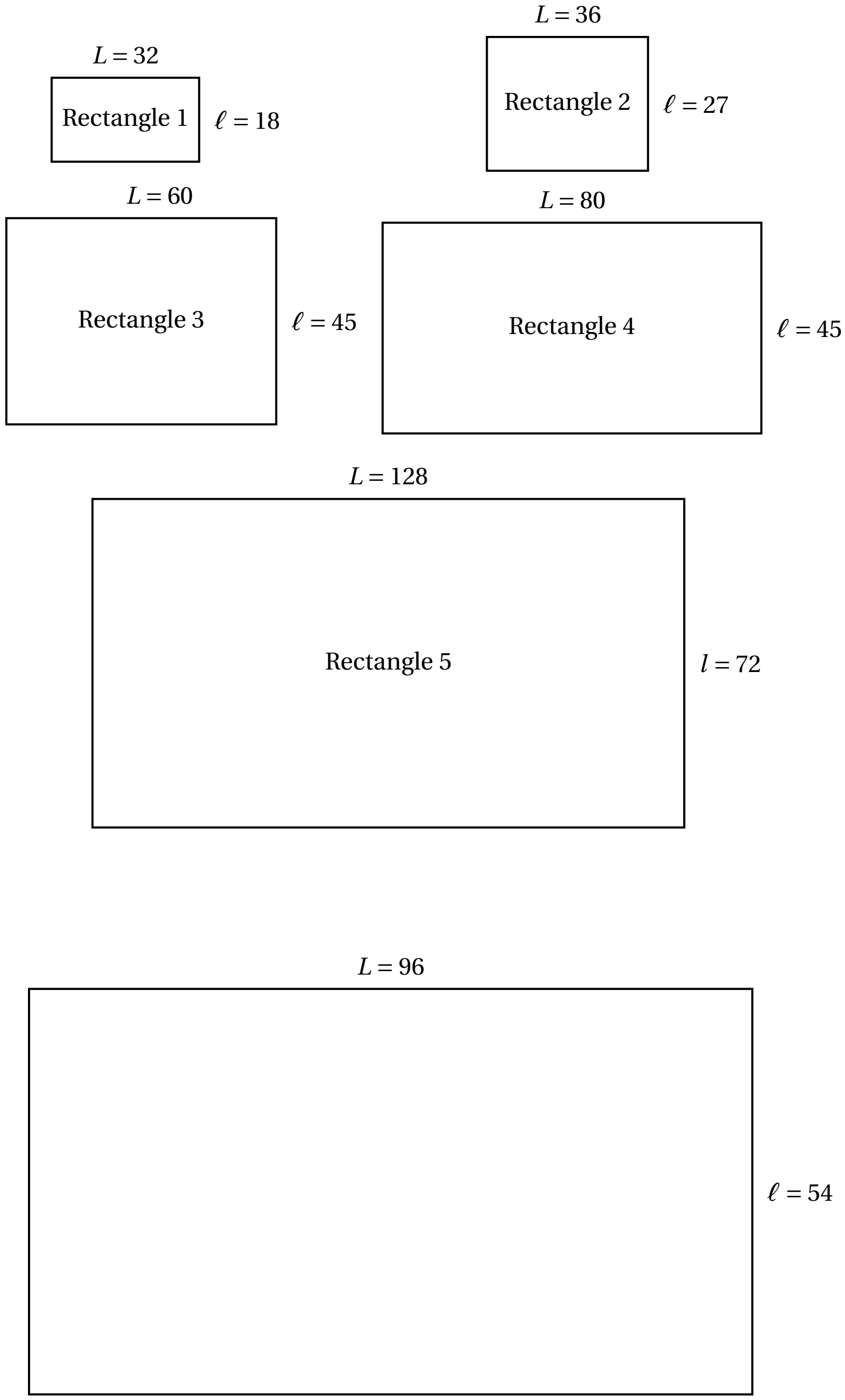
   $\Delta = \sqrt{\left(\dfrac{16}{9}\ell\right)^2 + \ell^2} = \sqrt{\dfrac{256}{81}\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{\left(\dfrac{256}{81} + 1\right)\ell^2} = \sqrt{\dfrac{256+81}{81}} \times \sqrt{\ell^2} = \sqrt{\dfrac{337}{81}}\,\ell$

   Or $\sqrt{\dfrac{337}{81}} \approx 2$ donc $\Delta \approx 2\ell$.

   La diagonale du rectangle vaut approximativement le double de sa largeur.

Annexe 1

À rendre avec la copie



Annexe 2

À rendre avec la copie

	Rectangle 1	Rectangle 2	Rectangle 3	Rectangle 4	Rectangle 5
Longueur L	32	36	60	80	128
Largeur ℓ	18	27	45	45	72
$\dfrac{L}{\ell}$ sous forme irréductible	$\dfrac{16}{9}$	$\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{60}{45}=\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{80}{45}=\dfrac{16}{9}$	$\dfrac{128}{72}=\dfrac{16}{9}$