Corrigé du brevet des collèges Amérique du Sud novembre 2008

Durée : 2 heures

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES — 12 points

Exercice 1

1.
$$A = \frac{2}{5} + \frac{1}{4}; \qquad B = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \qquad \text{et} \quad C = \frac{A}{B}.$$

$A = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$;
$B = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{3}{20}$.
Donc $C = \frac{A}{B} = \frac{\frac{13}{20}}{\frac{3}{20}} = \frac{13}{20} \times \frac{20}{3} = \frac{13}{3}$.

2. $D = 2^{3\times 2} = 2^6$; $E = (4 \times 3)^5 = 2^5$; $F = 5^{26-17} = 5^9$.

3. $G = 5\sqrt{32} + \sqrt{18} - 4\sqrt{50} = 5\sqrt{16 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} - 4\sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{16} \times \sqrt{2} + \sqrt{9} \times \sqrt{2} - 4\sqrt{25} \times \sqrt{2} = 20\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 20\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Exercice 2

1. a. $H = (x-4)^2 - x(x-10) = x^2 + 16 - 8x - x^2 + 10x = 2x + 16$.
   b. $H = 16$ ou $2x + 16 = 16$ soit $2x = 0$ et $x = 0$. 0 est la solution de l'équation.
2. a. $I = (7x-3)^2 - 5^2 = [(7x-3)+5][(7x-3)-5] = (7x-3+5)(7x-3-5) = (7x+2)(7x-8)$.
   b. $I = 0$ soit $(7x+2)(7x-8) = 0$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} 7x+2 &=& 0\\ 7x-8 &=& 0\end{array}\right.$ et enfin $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{2}{7}\\ x &=& \frac{8}{7}\end{array}\right.$

   L'équation a deux solutions : $-\frac{2}{7}$ et $\frac{8}{7}$.

Exercice 3

1. Par l'algorithme d'Euclide :
   $5\,148 = 2\,431 \times 2 + 286$;
   $2\,431 = 286 \times 8 + 143$;
   $286 = 143 \times 2 + 0$.
   Donc 143 est le PGCD à 5 148 et 2 431.
2. On a $A = \frac{5\,148}{2\,431} = \frac{143 \times 36}{143 \times 17} = \frac{36}{17}$.

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES — 12 points

L'exercice n° 1 a été supprimé en conformité avec le nouveau programme.

Exercice 2

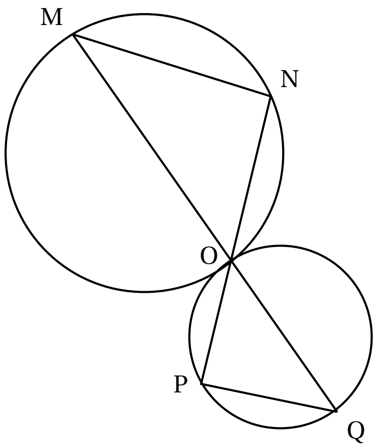
1. Le triangle MNO est inscrit dans un cercle qui admet pour diamètre l'un e ses côtés [MO] ; il est donc rectangle en N.

2. MNO est rectangle en N, donc (MN) est perpendiculaire à (NO).

   De même OPQ étant rectangle en P, donc (PQ) est perpendiculaire à (OP).

   Donc les droites (MN) et (PQ) étant toutes deux perpendiculaires à la même droite sont parallèles.

3. Les droites (MN) et (PQ) étant parallèles, la propriété de Thalès permet d'écrire : $\dfrac{\text{ON}}{\text{OP}} = \dfrac{\text{OM}}{\text{OQ}}$, soit $\dfrac{5}{\text{OP}} = \dfrac{7,5}{4,5}$ d'où $\text{OP} = \dfrac{5 \times 4,5}{7,5} = 3$ cm.



PROBLÈME **12 points**

PREMIÈRE PARTIE

1. On a OA = OB, donc le triangle OAB est rectangle isocèle.

   On trace donc un segment [AB] tel que AB = 8 et le cercle de diamètre [AB] ; la médiatrice de [AB] coupe le cercle en O.

   On trace l'arc de cercle supérieur.

   On construit le triangle équilatéral de côté 8en dessous pour obtenir le point O′. On trace enfin le cercle inférieur de rayon 8.

2. OA = OB. Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AOB s'écrit : $\text{AB}^2 = \text{AO}^2 + \text{OB}^2$ soit $8^2 = 2\text{OA}^2$, d'où $32 = \text{OA}^2$, donc $\text{OA} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}\sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (cm).

   La longueur de l'arc de cercle de centre O manquant est le quart de la longueur du cercle de centre O de rayon $4\sqrt{2}$.

   La longueur de l'arc de cercle de centre O dessiné est donc égale aux $\dfrac{3}{4}$ de la longueur du cercle de centre O, soit : $\dfrac{3}{4} \times 2\pi \times 4\sqrt{2} = 6\pi\sqrt{2}$ (cm).

3. La longueur d'un cercle de rayon 8 est : $2 \times \pi \times 8 = 16\pi$.

DEUXIÈME PARTIE

1. Le triangle OAB est rectangle isocèle en O ; la hauteur [OH] est aussi la médiane donc H est le milieu de [AB] ; donc $\text{AH} = \dfrac{8}{2} = 4$ (cm).

   La hauteur [OH] est aussi la bissectrice de l'angle droit, donc $\widehat{\text{OAH}} = \widehat{\text{AOH}} = 45°$. Donc le triangle OAH est isocèle en H, donc OH = HA = 4 (cm).

2. L'aire du triangle AOB est égale à $\dfrac{\text{AH} \times \text{HO}}{2} = \dfrac{4 \times 4}{2} = 8\ \text{cm}^2$.

   L'aire du triangle AO′B est égale à $\dfrac{\text{AB} \times \text{O'H}}{2} = \dfrac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

3. L'aire du disque de centre O est : $\pi \times \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32\pi$.

   Donc le le secteur d'angle $\widehat{\text{AOB}}$ a pour aire $\dfrac{32\pi}{4} = 8\pi$.

   Donc l'aire inférieure de la lentille est égale à :

   $8\pi - 8 \approx 17\ \text{cm}^2$.

4. On peut faire la même chose pour la partie inférieure :

   Le secteur d'angle $\widehat{\text{AO'B}}$ correspond à un angle au centre de 60° ; comme $60 = \dfrac{360}{6}$, son aire est le $\dfrac{1}{6}$ de celle du disque de rayon O′A = 8, donc d'aire 64π.

   Le secteur d'angle $\widehat{\text{AO'B}}$ a donc une aire de $\dfrac{64\pi}{6} = \dfrac{32\pi}{3}$.

   En enlevant à cette aire celle du triangle O′AB, on obtient l'aire de la partie supérieure de la lentille soit :

   $\dfrac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3}$.

   Finalement l'aire totale de la lentille est :

   $8\pi - 8 + \dfrac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3} \approx 22,9$ soit au cm^2 près 23 cm^2.