4ème - Puissances

COMPÉTENCES ÉVALUÉES DANS CE CHAPITRE :

(**T** : compétences transversales, **N** : activités numériques, **G** : activités géométriques, **F** : gestion de données et fonctions)

Intitulé des compétences		Eval.1	Eval.2	Eval.3
T1	Connaître le vocabulaire, les définitions et les propriétés du cours	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N15	Comprendre les notations a^n et a^{-n} (*)	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N16	Calculer à la main des produits, des quotients de puissances (*)	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N17	Multiplier un nombre décimal par 10^n ou 10^{-n} (*)	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N18	Ecrire un nombre décimal sous forme scientifique (ou d'autres formes faisant intervenir les puissances de 10)	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N19	Utiliser la notation scientifique pour obtenir un ordre de grandeur du résultat d'un calcul	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N20	Effectuer à la main des calculs contenant des puissances	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N21	Effectuer à la calculatrice des calculs contenant des puissances	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯

Taux de réussite :
............%

Note du chapitre :
............/20

Moyenne de la classe :
............/20

* : cette compétence fait partie du **socle commun**.

Légende du tableau de compétences :

Deux points verts : *Je sais très bien faire*

Un point vert : *Je sais bien faire, mais il reste quelques erreurs*

Un point rouge : *Je ne sais pas bien faire, il y a trop d'erreurs*

Deux points rouges : *Je sais pas faire du tout*

7.1 Comprendre les notations a^n et a^{-n}

Définition : puissances d'exposant positif

Soit a un nombre relatif (différent de 0), et n un entier positif ($n \geq 2$).
On note a^n, et on prononce "a exposant n", le produit de n facteurs, tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n facteurs}}$$

De plus, on a $a^1 = a$ et $a^0 = 1$

Exemples :

- $7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$
- $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$
- $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{243}{1024}$
- $(-35)^1 = -35$
- $17^0 = 1$

Remarques : ⚠ Attention à l'importance des parenthèses !!

- $-3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 = -81$ alors que $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
- $\dfrac{2^2}{7} = \dfrac{4}{7}$ alors que $\left(\dfrac{2}{7}\right)^2 = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{4}{49}$

Cas particulier : les puissances de 10

En écriture décimale, 10^n s'écrit avec le chiffre 1 suivi de n zéros : $10^n = 1\underbrace{00\cdots0}_{n \text{ zéros}}$

Exemples :

- $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$
- $10^{12} = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{\text{12 facteurs}} = 1\,000\,000\,000\,000$

Définition : puissances d'exposant négatif

Soit a un nombre relatif (différent de 0), et n un entier positif ($n \geq 1$).
On note a^{-n} l'**inverse** de a^n :

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n facteurs}}}$$

Exemples :

- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0,0625$
- $(-7)^{-3} = \frac{1}{(-7)^3} = -\frac{1}{343}$
- $20^{-1} = \frac{1}{20^1} = \frac{1}{20} = 0,05$

Cas particulier : les puissances de 10

En écriture décimale, 10^{-n} s'écrit avec le chiffre 1 précédé de n zéros, avec une virgule après le premier zéro : $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,0\cdots0}_{n \text{ zéros}}1$

Exemples :

- $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0,000\,01$
- $10^{-9} = \frac{1}{10^9} = 0,000\,000\,001$
- $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1$

Remarque : peut-être comprenez-vous mieux à présent pourquoi la touche "inverse" de la calculatrice est celle-ci : $\boxed{x^{-1}}$

7.2 Effectuer des produits, des quotients de puissances

7.2.1 Opérations sur les puissances d'un même nombre

Prenons quelques exemples :

- **Il est assez facile de multiplier deux puissances d'un même nombre** :
  $4^3 \times 4^2 = (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4) = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ d'où $\boxed{4^3 \times 4^2 = 4^5}$ ou encore
  $10^5 \times 10^1 = (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10) \times 10 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$ d'où $\boxed{10^5 \times 10^1 = 10^6}$
- **Il est également assez facile de diviser deux puissances d'un même nombre** :
  $\frac{5^7}{5^4} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}} = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$ d'où $\boxed{\frac{5^7}{5^4} = 5^3}$ ou encore
  $\frac{10^2}{10^5} = \frac{10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{\cancel{10} \times \cancel{10}}{\cancel{10} \times \cancel{10} \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{10^3} = 10^{-10}$ d'où $\boxed{\frac{10^2}{10^5} = 10^{-3}}$
- **Mais attention : il n'y a pas de règle "toute faite" pour additionner ou soustraire des puissances d'un même nombre** :
  $2^4 + 2^7 = 16 + 128 = 144$ qui n'est pas une puissance de 2...
  ou encore $10^7 - 10^3 = 10\,000\,000 - 1\,000 = 9\,999\,000$

7.2.2 Calculer une puissance d'un produit ou d'un quotient

Prenons là aussi quelques exemples :

- $(5,2\times 10)^2 = (5,2\times 10)\times(5,2\times 10) = 5,2\times 10\times 5,2\times 10 = 5,2\times 5,2\times 10\times 10 = 5,2^2\times 10^2$
  d'où $\boxed{(5,2\times 10)^2 = 5,2^2\times 10^2}$
- $\left(\dfrac{2}{7}\right)^3 = \dfrac{2}{7}\times\dfrac{2}{7}\times\dfrac{2}{7} = \dfrac{2^3}{7^3}$ d'où $\boxed{\left(\dfrac{2}{7}\right)^3 = \dfrac{2^3}{7^3}}$

7.2.3 Prendre la puissance d'une puissance

Encore quelques exemples :

- $\left(5^3\right)^2 = (5^3)\times(5^3) = (5\times 5\times 5)\times(5\times 5\times 5) = 5\times 5\times 5\times 5\times 5\times 5 = 5^6$ d'où $\boxed{\left(5^3\right)^2 = 5^6}$
- $\left(10^4\right)^3 = 10^4\times 10^4\times 10^4 = 10\,000\times 10\,000\times 10\,000 = 1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$ d'où $\boxed{\left(10^4\right)^3 = 10^{12}}$

Formules de calcul sur les puissances de 10

Si n et p sont des entiers relatifs, on a :

- $10^n\times 10^p = 10^{n+p}$
- $\dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$
- $\left(10^n\right)^p = 10^{n\times p}$

7.3 Multiplier un nombre décimal par 10^n, par 10^{-n}

Multiplier par 10^n, par 10^{-n}

Soit n un entier positif;
• Pour multiplier un nombre décimal par 10^n, il suffit de décaler la virgule de n rangs vers la **droite**, en complétant par des zéros si nécessaire.
• Pour multiplier un nombre décimal par 10^{-n}, il suffit de décaler la virgule de n rangs vers la **gauche**, en complétant par des zéros si nécessaire.

Exemples :

$52,147\times 10^2 = 5214,7$ $\qquad 0,00019\times 10^7 = 1900$

$214758\times 10^{-4} = 21,4758$ $\qquad 21,3\times 10^{-6} = 0,0000213$

7.4 Ecriture scientifique d'un nombre décimal

Ecriture scientifique

La **notation scientifique** d'un nombre décimal est l'écriture de ce nombre sous la forme $\boxed{a \times 10^n}$ où :
- a est un nombre décimal n'ayant qu'un seul chiffre avant la virgule (ce chiffre ne pouvant pas être 0),
- n est un entier relatif (positif ou négatif).

Exemples : *On peut s'aider d'un tableau comme celui-ci :*

10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
				-2	4	5	9	,	1							
	9	5	3	0	0	0	0									
							0	,	0	0	0	6	3			

L'écriture scientifique de $-2459,1$ est $-2,4591 \times 10^3$

L'écriture scientifique de 9530000 est $9,53 \times 10^6$

L'écriture scientifique de $0,00063$ est $6,3 \times 10^{-4}$

Attention ! On peut écrire que $9530000 = 95,3 \times 10^5$, mais l'écriture ainsi obtenue n'est pas une écriture scientifique (car 95,3 a deux chiffres avant la virgule).

Attention ! On peut écrire que $0,00063 = 0,63 \times 10^{-3}$, mais l'écriture ainsi obtenue n'est pas une écriture scientifique (car 0,63 a un seul chiffre avant la virgule, mais c'est un zéro).

7.5 Obtenir un ordre de grandeur ou un encadrement du résultat d'un calcul en utilisant la notation scientifique

La notation scientifique est très pratique, entre autres, pour comparer de très grands nombres entre eux, ou pour comparer de très petits nombres entre eux. Elle peut aussi nous permettre de travailler sur les **encadrements** et sur les **ordres de grandeur** ; par exemple :

Soit A le nombre 629 547 200, et B le nombre 0,0000297.

Nombre	Ecriture scientifique	Encadrement	Ordre de grandeur
$A = 629\,547\,200$	$A = 6,295472 \times 10^8$	$10^8 < A < 10^9$	$A \approx 6 \times 10^8$.
$B = 0,0000297$	$B = 2,97 \times 10^{-5}$	$10^{-5} < B < 10^{-4}$	$B \approx 3 \times 10^{-5}$

► On peut en déduire, par exemple, un ordre de grandeur du produit $A \times B$:

$$\left(6 \times 10^8\right) \times \left(3 \times 10^{-5}\right) = (6 \times 3) \times \left(10^8 \times 10^{-5}\right) = 18 \times 10^3 = 18000$$

► ou encore, un ordre de grandeur du quotient $\frac{A}{B}$:

$$\frac{6 \times 10^8}{3 \times 10^{-5}} = \frac{6}{3} \times \frac{10^8}{10^{-5}} = 2 \times 10^{13} = 20\,000\,000\,000\,000$$

7.6 Effectuer à la main des calculs avec des puissances

Priorités

Dans un enchaînement de calculs, les priorités sont les suivantes :

1. d'abord, on effectue les calculs entre parenthèses ;
2. ensuite, on calcule les puissances ;
3. ensuite, on effectue les multiplications et les divisions ;
4. pour finir, on effectue les additions et soustractions.

Exemples :

$A=-12+5\times 2^3$	$B=-3^3\times(4-6)^2$	$C=5\times 10^{17}-380\times 10^{15}$	$D=\dfrac{4\times 10^7\times 6\times\left(10^{-4}\right)^2}{8\times 10^3}$
$A=-12+5\times 8$	$B=-27\times(-2)^2$	$C=500\times 10^{15}-380\times 10^{15}$	$D=\dfrac{4\times 6}{8}\times\dfrac{10^7\times 10^{-8}}{10^3}$
$A=-12+40$	$B=-27\times 4$	$C=(500-380)\times 10^{15}$	$D=\dfrac{24}{8}\times\dfrac{10^{-1}}{10^3}$
$A=28$	$B=-108$	$C=120\times 10^{15}$	$D=3\times 10^{-4}$

Remarques : • Dans les calculs A et B, les règles de priorité s'exercent de manière classique.

• Dans le calcul C, plutôt que de recourir à l'écriture décimale des deux termes de la différence, on a préféré écrire chaque terme en utilisant la même puissance de 10, avant de mettre cette puissance de 10 en facteur.

• Dans le calcul D, on regroupe d'une part les puissances de 10, d'autre part les autres nombres, et on effectue les calculs séparément.

7.7 Puissances et utilisation de la calculatrice

La touche pour les puissances est soit $x^{\blacksquare}$ (sur les Casio), soit la touche $\wedge$ (sur les TI)

Lorsqu'il y a besoin de plus de 9 chiffres pour écrire un nombre, la calculatrice affiche directement l'écriture scientifique de ce nombre.

On peut forcer la calculatrice à écrire les nombres sous forme scientifique en tapant **SHIFT** **MODE** , puis choisir **SCI** (sur les Casio), ou encore en tapant **2$^{\text{nd}}$** **MODE** , puis choisir **SCI** (sur les TI)