Devoir Surveillé n°4 Correction

Troisième

Bilan type Brevet

Durée 2 heures - Coeff. 8

Noté sur 40 points

Exercice 1. Frai/Faux — 5 points

Affirmation 1 (Fausse (2 points))

La solution de l'équation $5x+4=2x+17$ est un nombre entier.

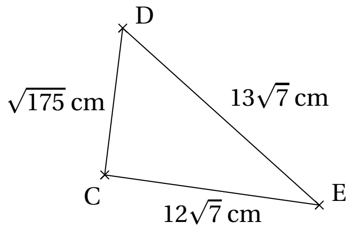
Preuve.

$$5x+4=2x+17 \iff 5x-2x=17-4$$
$$\iff 3x=13 \iff x=\frac{13}{3}$$

Donc l'unique solution de l'équation est le rationnel $x=\frac{13}{3}$ qui n'est pas un nombre entier. L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 (Vraie (2 points))

Le triangle CDE est rectangle en C.



Preuve.

- **On calcule les carrés des longueurs** :

$$\begin{cases} DC^2=\left(\sqrt{175}\right)^2=175 \\ CE^2=\left(12\sqrt{7}\right)^2=12^2\times 7=1\,008 \\ DE^2=\left(13\sqrt{7}\right)^2=13^2\times 7=1\,183 \end{cases}$$

- **Données**. Si le triangle CDE est rectangle, c'est en C car [DE] est le plus grand côté.
- **Le test** :

D'une part :

$$DE^2=1\,183$$

D'autre part :

$$DC^2+CE^2=175+1\,008$$
$$=1\,183$$

- **Conclusion**.
On a donc égalité, $DC^2+CE^2=DE^2$. De ce fait, d'après la *réciproque du théorème de Pythagore*, le triangle CDE est rectangle en C. L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 (Vraie (1 point))

Si une boutique utilise en moyenne 4 kg de sucre par jour, elle en utilisera environ $1,46\times 10^6$ g en une année.

Preuve.
La boutique utilise 4 kg soit 4 000 g par jour, donc en une année de 365 jours, elle utilisera :

$$4\,000\times 365=10^3\times(4\times 365)=10^3\times 1\,460=\underline{1,46\times 10^6\text{ g}}$$

L'affirmation 3 est donc vraie.

Exercice 2. QCM : c - c - b - c 4 points

Question 1 (Réponse c)

La notation scientifique du nombre $0,045 \times 10^5$ est

a. 45×10^4 **b.** $4,5 \times 10^7$ **c.** $4,5 \times 10^3$

Preuve
On a

$$0,045 \times 10^5 = 4,5 \times 10^{-2} \times 10^5 = \underline{4,5 \times 10^3}$$

Question 2 (Réponse c)

Une solution de l'équation $x^2 - 2x - 8 = 0$ est :
a. 0 **b.** 3 **c.** 4

Preuve

- Pour $x = 0$ on a :
$$x^2 - 2x - 8 = 0^2 - 2 \times 0 - 8 = -8 \neq 0$$
Donc 0 n'est pas solution de l'équation.
- Pour $x = 3$ on a :
$$x^2 - 2x - 8 = 3^2 - 2 \times 3 - 8 = 9 - 6 - 8 = -5 \neq 0$$
Donc 3 n'est pas solution de l'équation.
- Pour $x = 4$ on a :
$$x^2 - 2x - 8 = 4^2 - 2 \times 4 - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$$
Donc 4 est solution de l'équation.

La bonne réponse à la question 3 est la réponse c .

Question 3 (Réponse b)

Si $\begin{cases} A = 2^3 \times 3^3 \times 5^5 \times 13 \\ B = 2^4 \times 3^2 \times 5^4 \times 7 \end{cases}$, alors un diviseur commun de A et B est :

a. $2^3 \times 3^2 \times 5^4 \times 13$ **b.** $2^3 \times 3^2 \times 5^4$ **c.** $2^3 \times 3^3 \times 5^4$

Question 4 (Réponse c)

$\dfrac{8 \times 10^3 \times 28 \times 10^{-2}}{14 \times 10^{-3}}$ est égal à

a. 16 000 **b.** $0,16$ **c.** $1,6 \times 10^5$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{8 \times 10^3 \times 28 \times 10^{-2}}{14 \times 10^{-3}} &= \frac{(8 \times 2 \times \cancel{14}) \times \left(10^3 \times 10^{-2}\right)}{\cancel{14} \times 10^{-3}} \\ &= \frac{(8 \times 2) \times 10^{3-2}}{10^{-3}} \\ &= 16 \times 10^{1-(-3)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{8 \times 10^3 \times 28 \times 10^{-2}}{14 \times 10^{-3}} = 16 \times 10^4 = 1,6 \times 10^5}$$

La bonne réponse est c.

Exercice 3. Choisir une forme adaptée de $C(x)$ — 5 points

On considère l'expression :

$$C(x) = (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3)$$

1. **[1.5 point]** A l'aide d'un développement :

$$\begin{aligned} C(x) &= (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3) \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 2(2x^2 + 3x + 2x + 3) \\ &= -x^2 + x + 2 - 4x^2 - 6x - 4x - 6 \\ C(x) &= \underline{-5x^2 - 9x - 4} \end{aligned}$$

2. **[1.5 point]** A l'aide d'une factorisation :

$$\begin{aligned} C(x) &= (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3) \\ &= (x+1)\Big[(2-x) - 2(2x+3)\Big] \\ &= (x+1)\Big[2 - x - 4x - 6\Big] \\ C(x) &= \underline{(x+1)(-5x-4)} \end{aligned}$$

3. **[1 point]** On a facilement en utilisant la forme factorisée par exemple $\underline{C(-1) = 0}$ car :

$$C(x) = (x+1)(-5x-4)$$

Donc pour $x = -1$ on obtient :

$$C(-1) = \underbrace{(-1+1)}_{0}\Big(-5 \times (-1) - 4\Big) = 0$$

4. **[1 point] Résoudre l'équation $C(x) = 0$.**

On utilise la forme factorisée pour obtenir une équation produit nul.

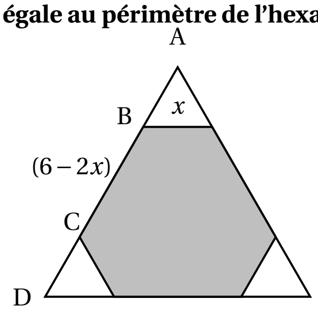
> **Théorème 1**
>
> Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$$\begin{aligned} C(x) = 0 &\iff (x+1)(-5x-4) \\ &\iff \big(x+1=0\big) \text{ ou } \big(-5x-4=0\big) \\ &\iff \big(x=-1\big) \text{ ou } \big(x = -\frac{4}{5}\big) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc -1 et $-\dfrac{4}{5}$.

Exercice 4. Les triangles 4 points

Trois triangles équilatéraux identiques sont découpés dans les coins d'un triangle équilatéral de côté 6 cm. La somme des périmètres des trois petits triangles est égale au périmètre de l'hexagone gris restant. Quelle est la mesure du côté des petits triangles ?



- **Périmètre P_1 des trois triangles**
  On appelle x la longueur des côtés des petits triangles équilatéraux. Le périmètre P_1 de ces trois triangles est donc de :
  $$P_1 = 3 \times 3x = 9x$$
- **Périmètre P_2 de l'hexagone**
  L'hexagone est composé :
  - de 3 des côtés des petits triangles équilatéraux, donc chacun de longueur x ;
  - de 3 côtés dont chacun mesure la longueur d'un côté du grand triangle (soit 6 cm) moins deux fois celui des petits triangles équilatéraux soit :
    $$BC = AD - 2AB = 6 - 2x$$
  - Le périmètre de l'hexagone est donc de :
    $$P_2 = 3x + 3 \times (6 - 2x) = 18 - 3x$$
- **Égalité**
  On veut donc que $P_1 = P_2$ soit
  $$9x = 18 - 3x$$
  d'où
  $$12x = 18$$
  et donc
  $$\boxed{x = \frac{18}{12} = 1,5 \text{ cm}}$$
- **Conclusion**
  $$\boxed{\text{La mesure du côté des petits triangles est donc de } 1,5 \text{ cm.}}$$

Exercice 5. Un programme de calcul 5 points

Voici un programme de calcul :

Étape 1	Choisir un nombre entier positif
Étape 2	Ajouter 1
Étape 3	Calculer le carré du résultat
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ

1. [1 point] On applique ce programme de calcul au nombre 3. Montrer que le résultat obtenu est 7.

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	3
Étape 2	Ajouter 1	$3+1=4$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$4^2 = 16$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$16 - 3^2 = 16 - 9 = \underline{7}$

Le résultat obtenu avec 3 au départ est bien 7.

2. Voici deux affirmations :

> **Affirmation 4**
>
> Le chiffre des unités du résultat obtenu est 7.

> **Affirmation 5**
>
> Chaque résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit.

2. a. [2 points] Vérifier que ces deux affirmations sont vraies pour les nombres 8 et 13.

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	8	13
Étape 2	Ajouter 1	$8+1=9$	$13+1=14$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$9^2=81$	$14^2=196$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$81-8^2=\underline{17}$	$196-13^2=\underline{27}$

- Donc avec 8 on obtient 17,
  17 est un nombre dont le chiffre des unité est 7 donc l'affirmation 1 est vraie.
  En outre on a :
  $$17=8+9$$
  Le résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit. L'affirmation 2 est vraie.

- Donc avec 13 on obtient 27,
  27 est un nombre dont le chiffre des unité est 7 donc l'affirmation 1 est vraie.
  En outre on a :
  $$27=13+14$$
  Le résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit. L'affirmation 2 est vraie.

2. b. [2 points] Pour chacune des affirmation, expliquez si elle est vraie ou fausse quelque soit le nombre choisi au départ.

- **Pour l'affirmation 1.**

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	1
Étape 2	Ajouter 1	$1+1=2$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$2^2=4$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$4-1^2=3$

  En prenant 1 au départ on obtient 3 dont le chiffre des unités n'est pas 7, *l'affirmation 1 n'est donc pas toujours vraie.*

- **Pour l'affirmation 2.**
  On va partir d'un nombre quelconque, entier positif que l'on peut noter n.

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	n
Étape 2	Ajouter 1	$n+1$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$(n+1)^2$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$(n+1)^2-n^2$

  On obtient donc la différence de deux carrés $(n+1)^2-n^2$, terme que l'on peut développer :
  $$(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$$
  Or $2n+1$ pour s'écrire sous la forme d'une somme de l'entier n et de son suivant $n+1$:
  $$2n+1=n+(n+1)$$
  <u>L'affirmation 2 est donc toujours vraie</u>.

Exercice 6. Un problème de Bus — 3 points

Deux bus A et B partent en même temps du terminal à 6h du matin. le bus A part toutes les 36 min du terminus et le bus B part toutes les 48 min. A quelle heure les deux bus partiront de nouveau en même temps pour la première fois ?

Méthode 1 : On peut lister les multiples de 36 et de 48 :

Multiples de 36	Multiples de 48
36	48
72	96
108	**144**
144	192

Le plus petit multiple commun est donc 144, les deux bus partiront de nouveau en même temps pour la première fois après 144 min soit après 2h et 24 min. C'est donc à 8h 24 min que les deux bus partiront ensemble.

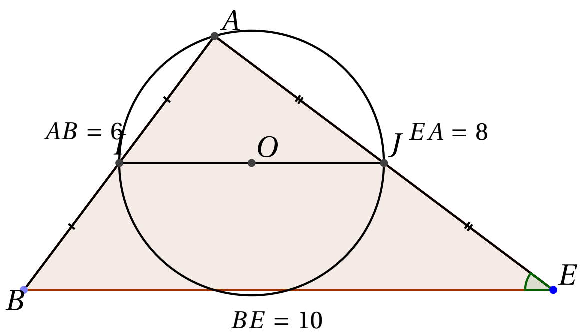
$$144 = 60 \times 2 + 24$$

Méthode 2 : On peut aussi chercher directement le PPCM des deux entiers à l'aide de la méthode du cours.

$$\begin{cases} 36 & = 2\times2\times3\times3 \\ 486 & = 2\times2\times2\times2\times3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 36 & = (2\times2\times3)\times3 = (12)\times3 \\ 48 & = (2\times2\times3)\times4 = (12)\times4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 36\times4 & = \underbrace{\left((12)\times3\right)}_{36}\times4 \\ 48\times3 & = \underbrace{\left((12)\times4\right)}_{48}\times3 \end{cases}$$

$$\boxed{PPCM = \underbrace{(12)}_{PGCD}\times4\times3 = 144}$$

Exercice 7. Géométrie — 6 points



1. **[1.5 point] Peut-on affirmer que les droites (IJ) et (BE) sont parallèles ?**
Dans le triangle ABE, les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AE], donc d'après le théorème des milieux, les droites (IJ) et (BE) sont parallèles.

2. **[1.5 point] Montrer que le triangle ABE est rectangle**.
Si le triangle BEA est rectangle, c'est forcément en A car BE est le plus grand cé. On a:

D'une part :		D'autre part :
$BE^2 = 10^2$	et	$BA^2+EA^2 = 6^2+8^2$
$BE^2 = 100$		$BA^2+EA^2 = 36+64$
		$BA^2+EA^2 = 100$

Conclusion : $BE^2 = BA^2+EA^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BEA est rectangle en A.

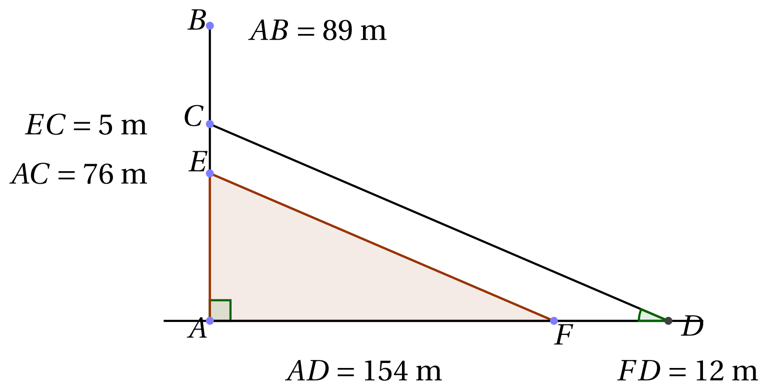
3. **3. a. [1 point] Justifier que le centre du cercle (C) est le milieu du segment [IJ]**.
Le triangle IAJ est rectangle en A donc le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse [IJ].

3. b. [2 points] Quelle est la mesure du rayon du cercle (C).
Dans le triangle ABE, les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AE], donc d'après le théorème des milieux, les droites (IJ) et (BE) sont parallèles et

$$IJ = \frac{BE}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

La mesure du rayon du cercle (C) est donc de $R = IJ \div 2 = 2{,}5$ cm.

Exercice 8. Le viaduc de Millau 3 points



1. [1.5 point] Calculer la hauteur du hauban [CD]. Arrondir au mètre près.

Dans le triangle ACD rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} CD^2 &= AC^2 + AD^2 \\ CD^2 &= 76^2 + 154^2 \\ CD^2 &= 5776 + 23716 \\ CD^2 &= 29492 \end{aligned}$$

Or CD est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{29492} \\ CD &\approx \underline{172 \text{ m}} \end{aligned}$$

2. [1.5 point] Les haubans [CD] et [EF] sont parallèles ?

- **Données**.
  Tout d'abord notons que puisque le point E appartient au segment [AC] et le point F au segment [AD] donc on a :

  $$AE = AC - EC = 76 - 5 = \underline{71 \text{ m}} \quad \text{et} \quad AF = AD - FD = 154 - 12 = \underline{142 \text{ m}}$$

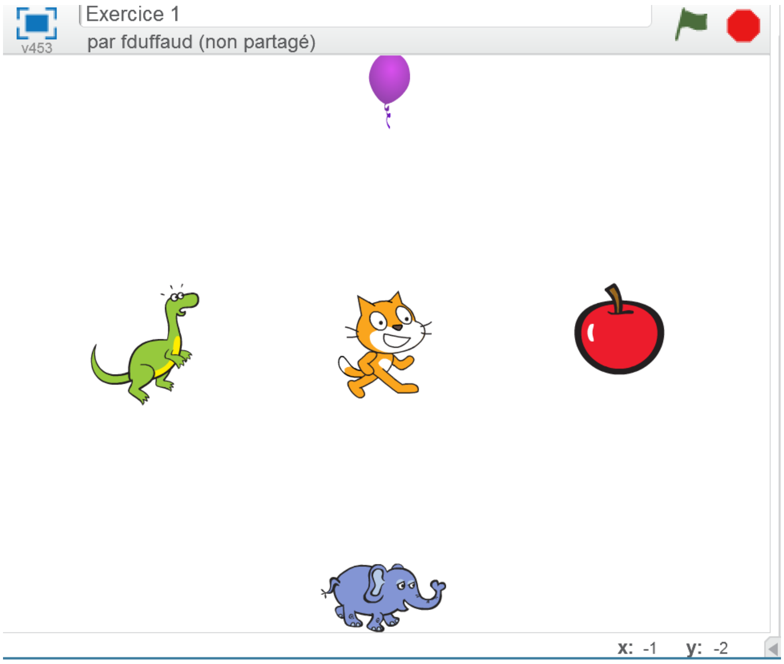
  Les points A,E, C et A, F, D sont alignés dans cet ordre sur deux droites sécantes en A.
- **Le test**.

  $$\begin{cases} \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{71}{76} \\ \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{142}{154} = \dfrac{71}{77} \end{cases}$$

- **Conclusion**.
  On n'a donc pas égalité, $\dfrac{AE}{AC} \neq \dfrac{AF}{AD}$. De ce fait, d'après la *contraposée du théorème de Thalès*, les droites (CD) et (EF) ne sont pas parallèles.

Exercice 9. Scratch 3 points

On considère le programme ci-dessous.



1. **[1 point] Après son exécution, à la fin du programme, le chat se retrouve sur la pomme, l'éléphant, le dinosaure ou le ballon ?**
   Après son exécution, à la fin du programme, le chat se retrouve sur le dinosaure. En effet, l'instruction de mouvement est « avancer de -15 », donc le chat se recule et se dirige vers la gauche.

2. **[2 points] Quelle est la valeur des variables a et b à la fin du programme après son exécution ?**
   A la fin du programme après son exécution :

   - Pour a : on répète 10 fois « ajouter à a la valeur 5 » en partant de -20, donc à la fin on obtient :

   $$a = -20 + 10 \times 5 = 30$$

   - Pour b : on répète 10 fois « ajouter à b la valeur 2 » en partant de 0, donc à la fin on obtient :

   $$b = 0 + 10 \times 2 = 20$$

Fin du devoir