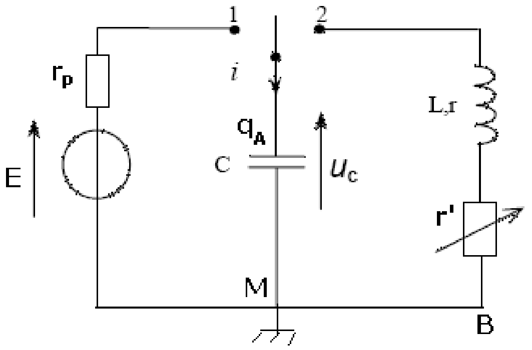
التذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية



I ـ تفريغ مكثف في وشيعة

1ـ النشاط التجريبي1

ننجز التركيب الكهربائي الممثل جانبه حيث نستعمل وسيط معلوماتي وحاسوب وبرنم يعالج المعطيات أو راسم التذبذب ذاكراتي .

+ نضبط التوتر المستمر الذي يعطيه المولد على القيمة E=3Vومقاومة الموصل الاومي على r′=0Ω

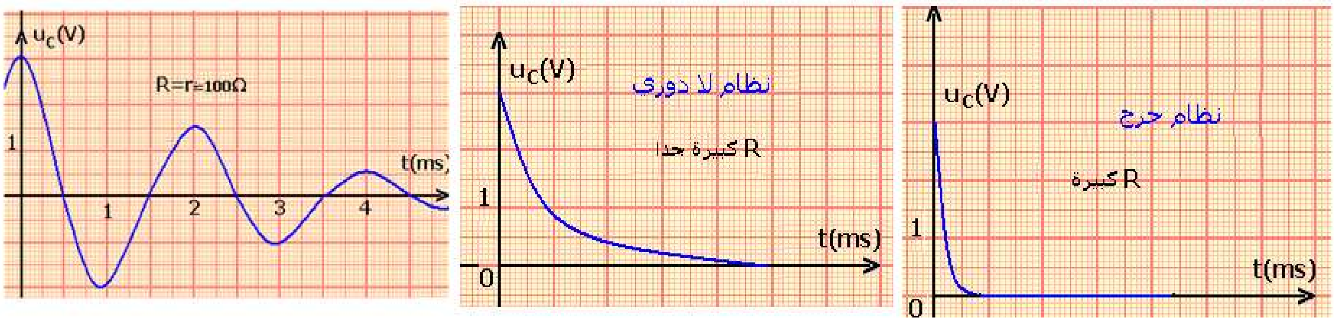
+نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع (1) لمدة زمنية كافية لشحن المكثف كليا .

+نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع (2) فنحصل على دارة RLC متوالية مقاومتها الكلية R=r+r′ حيث r مقاومة الو شيعة .

+نعاين التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف

+نعيد التجربة عدة مرات برفع المقاومة r′

النتائج :



الاستثمار:

1ـ يمثل الرسم التذبذبي الممثل باللون الأزرق في الشكل (2) نموذجا للمنحنى المحصل عليه بالنسبة r′=0

1-1 كيف يتغير وسع التوتر $u_c(t)$ ؟ هل $u_c(t)$ دالة دورية ؟

عند وضع K في الموضع (1) يشحن المكثف وعند وضعه في الموضع (2) نحصل على دارة RLC متوالية حيث في هذه الحالة يفرغ المكثف في الوشيعة .

ويكون التوتر $u_c(t)$ بين مربطي المكثف متناوبا . $u_c(t)$ ليست بدالة دورية .

-وسع التوتر $u_c(t)$ يتناقص مع الزمن t نقول **أن التذبذبات مخمدة**

بما أن الذبذبات تتم دون أن نزود الدارة RLC بالطاقة غير الطاقة المخزونة في المكثف ، نقول **أن الذبذبات حرة .**

خلاصة :

يؤدي تفريغ مكثف ، مشحون ، في وشيعة دارة RLC متوالية ، إلى ظهور تذبذبات حرة ومخمدة .

نقول أن الدارة RLC المتوالية تكون متذبذبا كهربائيا حرا ومخمدا .

أنظمة الذبذبات الحرة :

2-1 نسمي شبه الدور T المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليين للتوتر $u_c(t)$.عين مبيانيا T

من خلال المبيان يمكن أن نعين شبه الدور وهو المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر $u_c(t)$.

ـ تعريف بشبه الدور T

نسمي شبه الدور T المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليين للتوتر $u_c(t)$.

R

2 ـ ما تأثير المقاومة R على :

2-1 وسع التذبذبات ؟

عندما نغير المقاومة الكلية للدارة يتغير وسع الذبذبات.

2-2 شبه الدور T ؟

بالنسبة لقيم المقاومة صغيرة جدا يلاحظ أن شبه الدور لا يتعلق بقيمة R

3-عندما تأخذ المقاومة r′ قيمة كبيرة جدا : هل التوتر $u_c(t)$ المعاين تذبذبي ؟

عندما تأخذ R قيم كبيرة جدا $u_c(t)$ توتر غير تذبذبي أي أن الذبذبات تزول يكون لدينا خمود مهم .

4-حسب قيم المقاومة الكلية R للدارة RLC يلاحظ تجريبيا وجود نظامين للذبذبات : نظام شبه دوري ونظام لا دوري .

تعرف على هاذين النظامين من خلال الشكل 2

النظام شبه الدوري يحدث إذا كانت قيمة المقاومة R صغيرة .

النظام لا دوري عندما تكون R كبيرة جدا حيث تزول الذبذبات نظرا لوجود خمود مهم .

5- نضبط من جديد r′ على القيمة 0

في مرحلة أولى نأخذ L=11mH و C=1µF ونقيس شبه الدور T .

في مرحلة ثانية : نأخذ L=11mH و C=0,22µF ونقيس T .

هل يتعلق شبه الدور بكل من L و C ؟

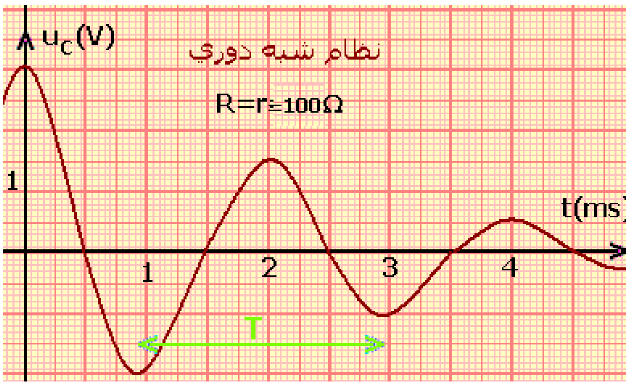
نعم يتعلق شبه الدور بقيم L و C ولا يتعلق بقيم R

ـ أنظمة الذبذبات الحرة

حسب مقاومة الدارة RLC نحصل على ثلاثة أنظمة

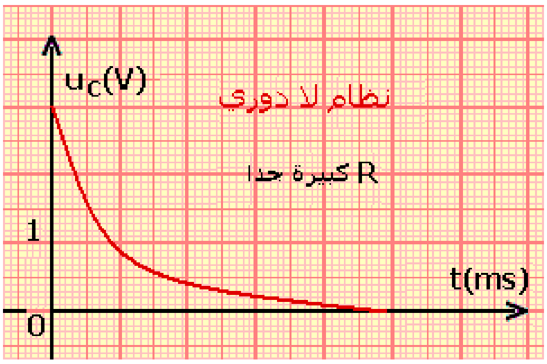
أ-نظام شبه دوري

R صغيرة نحصل على ذبذبات يتناقص وسعها تدريجيا مع الزمن

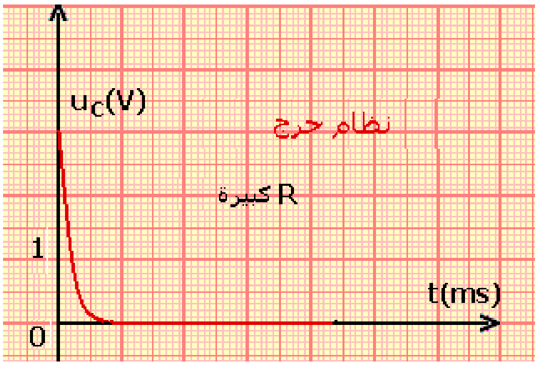


ب- نظام لا دوري

R كبيرة جدا = تزول الذبذبات نظرا لوجود خمود مهم ونسمي هدا النظام نظام لا دوري



ج- نظام حرج



في الذبذبات الحرة توجد قيمة معينة للمقاومة نرمز لها ب R_C وتسمى مقاومة حرجة وهي مقاومة تفصل بين النظام شبه الدوري والنظام اللا دوري ونسمي النظام في هذه الحالة بالنظام الحرج وفي هذه الحالة يرجع التوتر $u_c(t)$ إلى صفر بسرعة ودون تذبذب وتتعلق R_C ب C و L .

2 ـ المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية .

نعتبر الدارة المتوالية الممثلة في الشكل جانبه :

نطبق قانون إضافية التوترات بين F و D فنجد :

$$u_c + u_R + u_L = 0 \qquad (1)$$

$$u_R = r'.i \qquad u_L = ri + L\frac{di}{dt} \qquad i = C.\frac{du_C}{dt}$$

$$u_R = r'.C\frac{du_c}{dt} \qquad u_L = rC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة (1)

$$u_c + r'.C\frac{du_c}{dt} + rC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + (r+r')C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$r + r' = R$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0 \qquad (2)$$

المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف هي :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0 \qquad (2)$$

يعبر المقدار $\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}$ عن ظاهرة خمود الذبذبات ، ويحدد حسب قيم R نظام هذه الذبذبات .

II ـ الذبذبات غير المخمدة في دارة مثالية LC .

تتكون الدارة من مكثف سعته C وشحنته البدئية q_0

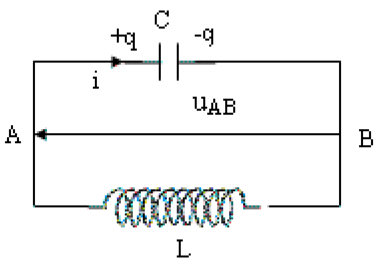
ووشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها الداخلية r ونعتبرها مهملة . تنعت هذه الدارة بالمثالية لاستحالة تحقيقها تجريبيا لكون أن كل الوشيعات تتوفر على مقاومة داخلية .

1 ـ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$.

حسب قانون إضافية التوترات لدينا :

$$u_c + u_L = 0 \qquad (1)$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} \qquad i = C.\frac{du_C}{dt}$$



$$u_L = LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة (1)

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0 \quad (2)$$

خلال الذبذبات الكهربائية الحرة غير المخمدة لدارة LC ، يحقق التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

2 ـ حل المعادلة التفاضلية :

المعادلة التفاضلية $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$ معادلة خطية من الدرجة الثانية ، رياضيا حلها يكتب على الشكل التالي :

$$u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

ـ U_m وسع الذبذبات .

ـ $\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$ الطور في اللحظة ذات التاريخ t .

T_0 : الدور الخاص للذبذبات .

φ : الطور عند أصل التواريخ (t=0)

أ ـ تحديد تعبير الدور الخاص :

نعوض الحل $u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ ف العادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -U_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C(t)$$

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C(t) = -\frac{1}{LC}u_C(t)$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

يتعلق الدور الخاص للذبذبات الحرة غير المخمدة بمعامل التحريض L وبسعة المكثف C :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

وحدة الدور الخاص T_0 في النظام العالمي للحدات هي الثانية . (s)

تمرين تطبيقي :

بين من خلال معادلة الأبعاد أن وحدة T_0 هي الثانية .

ب ـ تحديد φ و U_m :

لتحديد قيم φ و U_m نحدد الشروط البدئية عند تفريغ المكثف في الوشيعة . أي نعبر عن المقدارين $u_C(t)$ و $i(t)$ في اللحظة t=0 باعتبار أن هاتين الدالتين متصلتين كيف ما كانت t .

لدينا $i(t)=C.\frac{du}{dt}\Rightarrow i(t)=-\frac{2\pi}{T_0}.C.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

عند اللحظة t=0 لدينا i(0)=0 الوشيعة لا يمر فيها أي تيار كهربائي

$$i(0)=-\frac{2\pi}{T_0}.C.\sin(\varphi)=0\Rightarrow\sin\varphi=0\Rightarrow\varphi=0\ \ ou\ \ \varphi=\pi$$

في البداية شحنة المكثف مشحون : $u_C(0)=E$.

$u_C(0)=U_m\cos(\varphi)=E$ وبما أن E>0 و $U_m>0$ فإن $\cos(\varphi)>0\Rightarrow\varphi=0$

وبالتالي فإن :

$$u_C(t)=E\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

ج ـ تعبير الشحنة q(t) و i(t) .

نعلم أن شحنة المكثف هي :

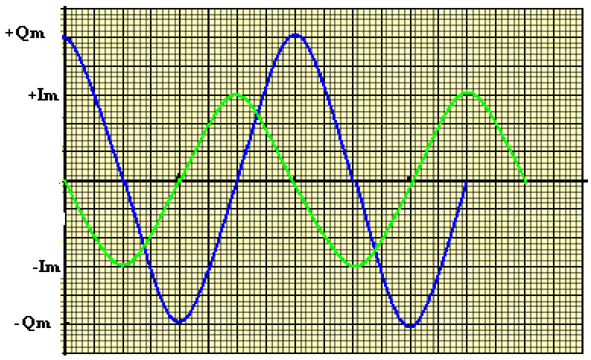
$$q(t)=C.u_C(t)=CU_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)=q_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$q_m=CU_m$$

شدة التيار الكهربائي :

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=-q_m\omega_0\sin(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$$

$$=q_m\frac{2\pi}{T_0}\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi+\frac{\pi}{2})=I_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$



i(t) متقدمة في الطور ب $\frac{\pi}{2}$ بالنسبة ل q(t) و u(t)

نقول أن u(t) و q(t) على تربيع في الطور

التمثيل المبياني ل q(t) وu(t)

في اللحظة t=0 عندنا $q=Q_m$ و $\varphi=0$

$$q(t)=Q_m\cos\frac{2\pi}{T_0}t$$

$$i(t)=I_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\frac{\pi}{2})$$

ملحوظة : عندما تكون شحنة المكثف قصوية تكون شدة التيار الكهربائي منعدمة .

III ـ انتقالات الطاقة بين المكثف والوشيعة .

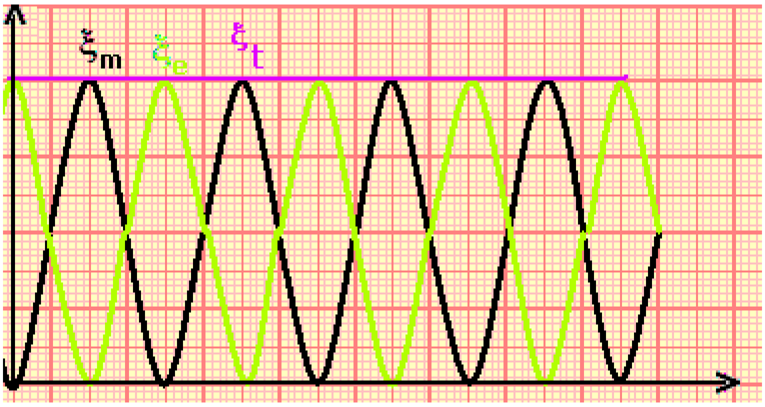
توصلنا في الدروس السابقة أن المكثف بإمكانه أن يخزن طاقة كهربائية $\xi_e=\frac{1}{2}Cu_C^2$ وأن الوشيعة كذلك

بإمكانها أن تخزن طاقة مغنطيسية $\xi_m=\frac{1}{2}Li^2$.

1 ـ الطاقة في الدارة LC مثالية :

دراسة منحنيات تغير الطاقات ξ_t, ξ_e, ξ_m بدلالة الزمن في دارة RL مثالية .

الطاقة الكلية في المخزونة في الدارة LC هي في كل لحظة مجموع الطاقة الكهربائية في المكثف $\xi_e = \frac{1}{2}Cu_C^2$ والطاقة المخزونة في الوشيعة $\xi_m = \frac{1}{2}Li^2$.



$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

تمثل الشكل جانبه تغيرات ξ_t, ξ_e, ξ_m بدلالة الزمن .

1 ـ كيف تتغير الطاقة ξ_m عندما تنقص الطاقة المخزونة في المكثف ؟

2 ـ كيف تتغير الطاقة ξ_e عندما تنقص الطاقة المخزونة في الوشيعة ؟

3 ـ كيف تتغير الطاقة الكلية ξ_t ؟ أكتب تعبير الطاقة الكلية بطريقتين .

4 ـ أثبت رياضيا أن الطاقة الكلية لدارة مثالية LC ثابتة خلال الزمن t . بطريقتين ، استعمال حل المعادلة التفاضلية واستعمال المعادلة التفاضلية مباشرة .

خلاصة :

تكون الطاقة الكلية لدارة مثالية LC ثابتة خلال الزمن وتساوي الطاقة البدئية المخزونة في المكثف .

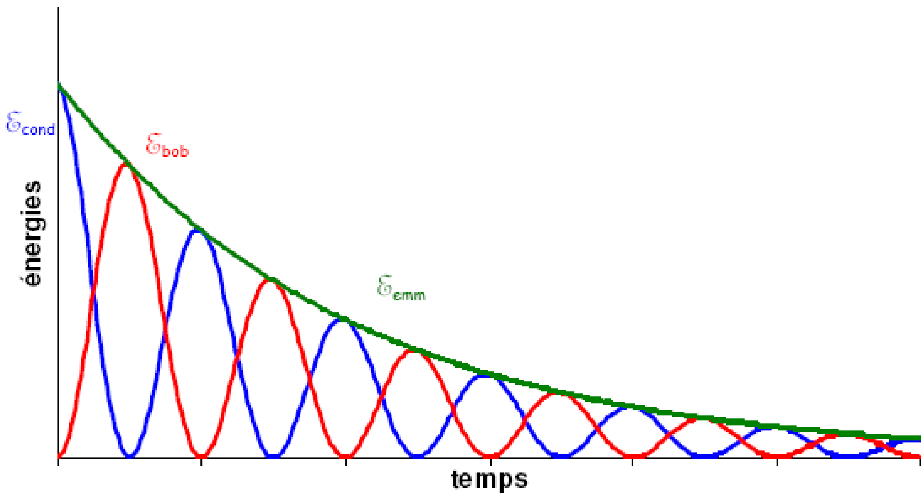
خلال الذبذبات غير المخمدة تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف إلى طاقة مغنطيسية في الوشيعة والعكس صحيح .

$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}Li_m^2$$

2 ـ الطاقة في الدارة RLC المتوالية .

دراسة منحنيات تغير الطاقة ξ_t, ξ_e, ξ_m بدلالة الزمن في RLC متوالية

خلال دراسة تجريبية لدارة RLC متوالية حيث المقاومة الكلية R غير منعدمة نعاين بواسطة جهاز ملائم لهذا الغرض منحنيات تغيرات الطاقة ξ_t, ξ_e, ξ_m بدلالة الزمن فنحصل على المنحنيات الممثلة في الشكل جانبه :



1 ـ كيف تتغير الطاقة ξ_e عند تزايد ξ_m ؟

نفس السؤال عند تناقص ξ_m . ماذا تستنتج ؟

عندما تنقص الطاقة في المكثف تزداد الطاقة المخزونة في الوشيعة والعكس صحيح . أي أن هناك تبادل طاقي بين المكثف والوشيعة

2 ـ كيف تتغير بصفة عامة الطاقة الكلية ξ_t المخزونة في الدارة بدلالة الزمن ؟

يلاحظ أن خلال كل تبادل طاقي بين المكثف والوشيعة تتناقص الطاقة الكلية نتيجة وجود المقاومة R .

2 ـ ما الظاهرة المسؤولة عن هذا التغيير ؟

ظاهرة خمود نتيجة تحول جزء من الطاقة الكلية بمفعول جول إلى طاقة حرارية .

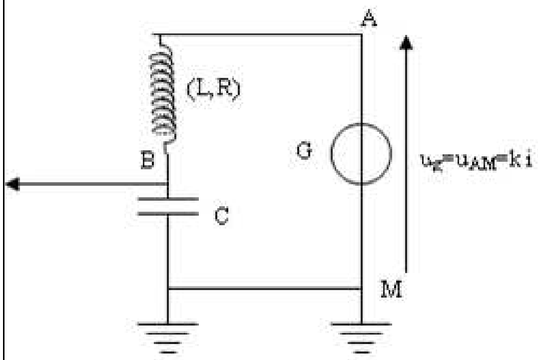
4 ـ ما المقدار الذي يحول دون الحصول على ذبذبات غير مخمدة ؟

$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

$$\frac{d\xi_t}{dt} = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}.\frac{dq}{dt} = i\left(L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}\right)$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = -R\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d\xi_t}{dt} = -Ri^2$$



من خلال هذه النتيجة يتبين أن الطاقة الكلية تناقصية :

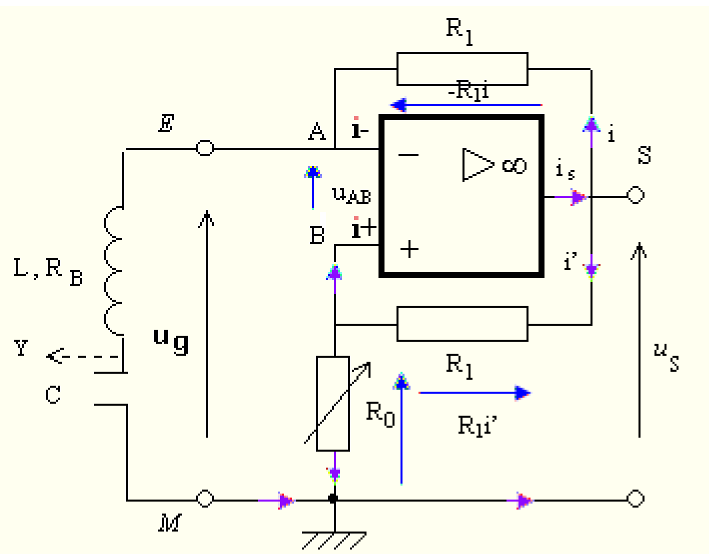
$\frac{d\xi_t}{dt} = -Ri^2 < 0$ ويعزى هذا التناقص إلى وجود المقاومة R .

خلاصة :

تتناقص الطاقة الكلية لدارة RLC متوالية تدريجيا بسبب مفعول جول .

VI ـ صيانة الذبذبات .

في كل لحظة يمكن كتابة



$$u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$$

$$ki = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt} \; et \;\; u = u_{BM}$$

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + (R-k)C\frac{du}{dt} + u = 0$$

بالنسبة لـk=R نحصل على المعادلة التفاضلية التالية $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0$ وهي المعادلة المميزة للمتذبذب (L,C) ذي مقاومة غير مهملة .

إذن فالتركيب المدروس يمكن من صيانة التذبذبات .

إنجاز المولد G

المضخم العملياتي كاملا ويشتغل في النظام الخطي .

و $u_{AB}=0$ $i^-=i^+=0$

$$u_g = u_{AM} = u_{AS} + u_{SB} + u_{BM}$$
$$= -R_1 i + R_1 i' + R_0 i'$$
$$u_{AS} = u_{AB} + u_{BS}$$
$$-R_1 i = 0 - R_1 i' \Leftrightarrow i = i'$$
$$u_g = R_0 i \Leftrightarrow u_g = ki$$
$$k = R_0$$

معاينة التوتر بين مربطي مكثف الدارة (L,C) الذي يوجد بها المولد G

عند معاينة التوتر بين مربطي مكثف نلاحظ :

$R_0 < R$ لاتكون هناك تذبذبات

$R_0 > R$ تكون هناك تذبذبات لا جيبية

R_0 أكبر بقليل من R تكون التذبذبات جيبية