3

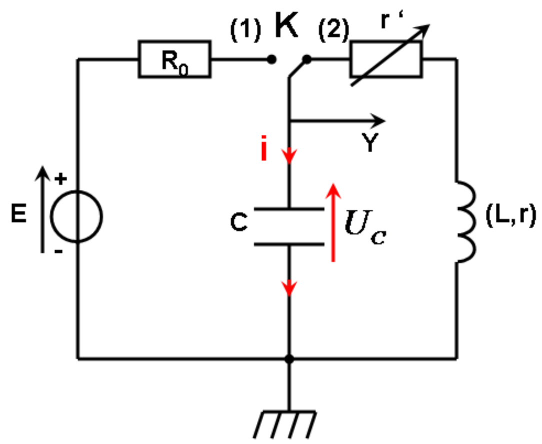
الذبذبات الحرة في الدارة RLC متوالية

Les oscillations libres dans un circuit RLC série

I – تفريغ المكثف :

1 – التركيب التجريبي :

تعتبر التركيب التجريبي التالي :

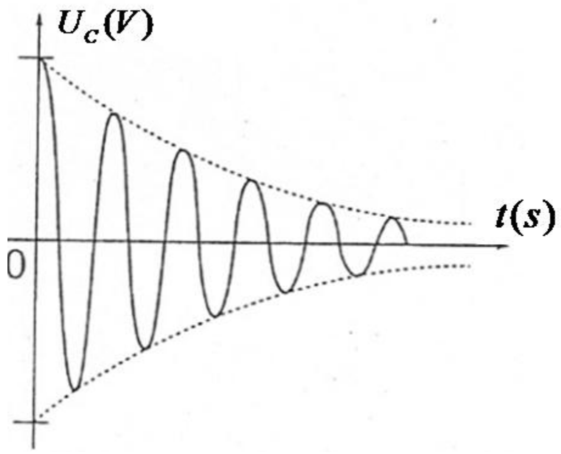


- نشحن المكثف بوضع قاطع التيار K في الموضع (1) .

- نضع قاطع التيار في الموضع (2) فنحصل على دارة RLC متوالية إذا كانت المقاومة R صغيرة نلاحظ أن :

- التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف متناوب أي أنه يتأرجح بين قيم قصوى موجبة و قيم دنيا سالبة , نقول أن تفريغ المكثف تذبذبي .
- وسع التوتر $u_C(t)$ يتناقص مع مرور الزمن نقول أن التذبذبات مخمدة .

- يؤدي تفريغ مكثف مشحون في وشيعة داراة RLC متوالية إلى ظهور ذبذبات حرة و مخمدة , نقول أن الدارة RLC المتوالية تُكُون متذبذبا كهربائيا حرا و مخمدا.



❖ **ملحوظة :**

- تسمى هذه الذبذبات بالحرة نظرا لعدم توفر الدارة RLC المتوالية على أي مصدر آخر للطاقة ماعدا الطاقة المخزونة في المكثف.

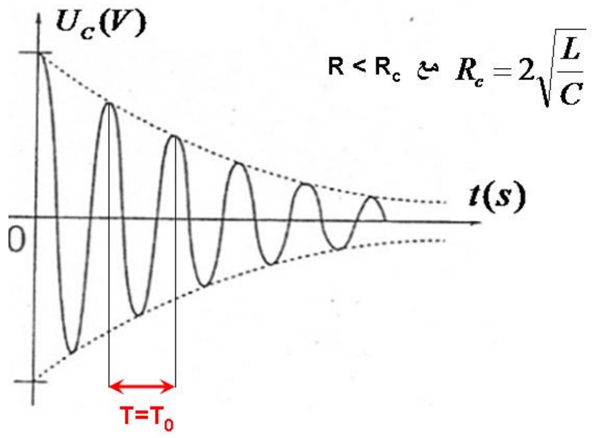
- يمكن استعمال GBF مولد ذو تردد منخفض إشارته مربعية حيث يشحن خلال نصف الدور عندما يخضع لرتبة توتر صاعدة خلال نصف الدور و يفرغ يفرغ المكثف خلال الدور الموالي.

2 – أنظمة الذبذبات الحرة :

حسب قيم المقاومة **R** نحصل على ثلاث أنظمة :

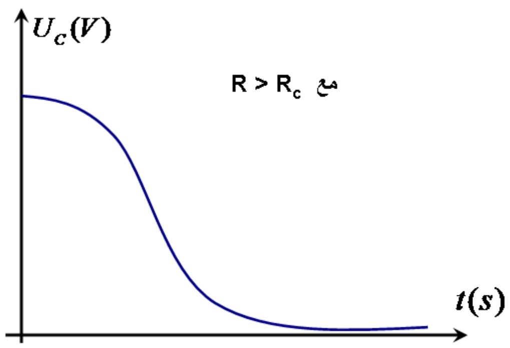
أ – نظام شبه دوري : régime pseudopériodique

يحدث عندما تكون قيمة **R** صغيرة فنحصل على ذبذبات يتناقص وسعها مع الزمن حيث شبه الدور T يساوي تقريبا الدور الخاص T_0 :



ب – نظام لا دوري : régime apériodique

عندما تكون **R** كبيرة نحصل على خمود مهم فتزول التذبذبات :

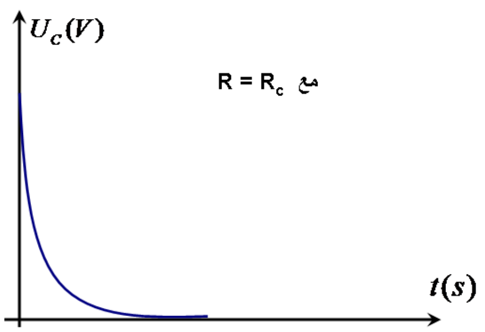


ج – نظام حرج : régime critique

- في الذبذبات الحرة توجد قيمة معينة للمقاومة نرمز لها ب R_c تسمى مقاومة حرجة و هي الحد الفاصل بين النظام شبه الدوري و النظام اللادوري.

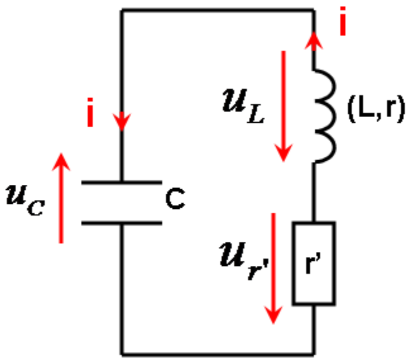
- في هذا النظام يرجع التوتر $u_C(t)$ إلى الصفر بسرعة بدون تذبذب.

- R_c تتعلق ب **L** و **C** .



3 – المعادلة التفاضلية للدارة RLC :

نعتبر الدارة **RLC** المتوالية :



حسب قانون إضافية التوترات : $u_C + u_{r'} + u_L = 0$

وحسب قانون أوم : $u_{r'} = r'.i$

و لدينا : $u_L = r.i + L\dfrac{di}{dt}$

و لدينا $i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_C}{dt}$

نعوض : $u_C + r'.C\dfrac{du_C}{dt} + r.C\dfrac{du_C}{dt} + L.C\dfrac{d^2u_C}{dt^2} = 0$

$$L.C\frac{d^2u_C}{dt^2} + (r'+r)C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف. $R = r'+r$ مع $\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{LC}u_C = 0$

المقدار $\dfrac{R}{L}\dfrac{du_C}{dt}$ يعبر عن ظاهرة خمود الذبذبات .

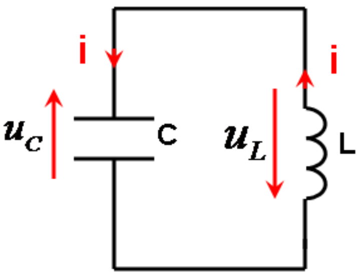
II – الذبذبات غير المخمدة في دارة مثالية LC :

تسمى هذه الدارة بالمثالية لاستحالة تحققها تجريبيا نظرا لتوفر الوشيعة على مقاومة داخلية.

1 – المعادلة التفاضلية :

حسب قانون إضافية التوترات : $u_C + u_L = 0$

$i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_C}{dt}$ مع $u_C + L\dfrac{di}{dt} = 0$



$$u_C + L.C\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$$

المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$: $\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}u_C = 0$

حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية يكتب على الشكل التالي :

و هو عبارة عن دالة جيبية : $u_C(t) = U_{\max}\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

U_{max} : الوسع القصوي.

T_0 : الدور الخاص

φ : الطور عند أصل التواريخ $t=0$

$\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi$: الطور عند اللحظة t

2 – تحديد تعبير الدور الخاص :

لدينا :
$$u_C(t)=U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

اشتقاق :
$$\frac{du_C}{dt}=-\frac{2\pi}{T_0}.U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

اشتقاق :
$$\frac{d^2u_C}{dt^2}=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.u_C$$

نعوض في المعادلة التفاضلية :
$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.u_C+\frac{1}{LC}u_C=0$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2=\frac{1}{LC}\quad\Rightarrow\quad\frac{2\pi}{T_0}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\boxed{T_0=2\pi\sqrt{LC}}$$

3 – تحديد u_m و φ :

نحدد u_m و φ بالاعتماد على شروط البدئية حيث نعبر عن المقدارين : $u_C(t=0)$ و $i(t=0)=C\frac{du_C}{dt}$:

لدينا المكثف مشحون عند $u_C(t=0)=E$:
$$u_C(t=0)=U_m\cos(\varphi)=E\quad\Rightarrow\quad\boxed{u_C=E}$$

$$\cos\varphi=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{\varphi=0}$$

$$\boxed{u_C(t)=E\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)}$$

4 – تعبير الشحنة :

$$q(t)=C.u_C(t)=C.U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$\boxed{q(t)=q_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)}$$

5 – تعبير شدة التيار i(t) :

لدينا :

$$i(t)=C\frac{du_C}{dt}$$

$$i(t)=C\frac{d}{dt}\left(U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\right)$$

$$i(t)=-C.U_m.\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$ مع $T_0=2\pi\sqrt{Lc}$

$$i(t)=-C.E.\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$i(t)=-.E.\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$ مع $I_m=E.\sqrt{\frac{C}{L}}$

III – انتقال الطاقة بين المكثف و الوشيعة :

1 – الطاقة في الدارة LC المثالية :

- الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف : $E_e=\frac{1}{2}C.u_C^2$

- الطاقة المغنطيسية المخزونة في الوشيعة : $E_m=\frac{1}{2}L.i^2$

الطاقة الكلية الخزونة في الدارة LC : $E=E_e+E_m$

$$E_t=\frac{1}{2}C.u_C^2+\frac{1}{2}L.i^2$$

- عندما تنقص الطاقة الكهربائية E_e المخزونة في المكثف , تزداد الطاقة المخزونة في الوشيعة و العكس بالعكس, إذن تبادل طاقي بين الوشيعة و المكثف , و هذا ما يفسر انحفاظ الطاقة الكلية.

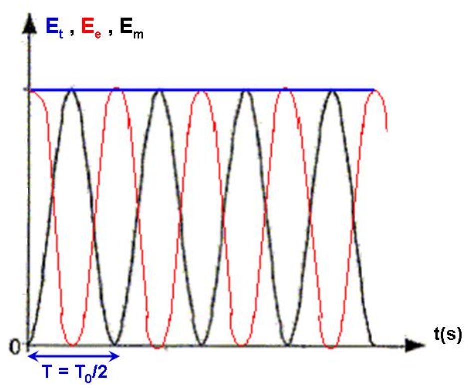
- عندما تكون $u_C=E$ تكون $i=0$

- عندما تكون $u_C=0$ تكون $i=i_m$

$$E_t=\frac{1}{2}C.u_m^2=\frac{1}{2}L.i_m^2$$

تنحفظ الطاقة الكلية التي تخزنها الدارة LC و قيمتها ثابتة و تساوي الطاقة البدئية التي يخزنها المكثف.

❖ لتمثيل تغيرات الطاقة بدلالة الزمن نعبر عن $E_e(t)$ و $E_m(t)$:



هام

✓ تعبير E_e بدلالة الزمن : $U = E\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ مع $E_e = \frac{1}{2}Cu^2$

$$E_e = \frac{1}{2}C.E^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

E_{max} : الطاقة القصوية عند $t=0$

$$E_e = E_{max}\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

✓ تعبير E_m بدلالة الزمن : $E_m = \frac{1}{2}L.i^2$

$$i(t) = C\frac{du}{dt} = -C.E\frac{2\pi}{T_0}\sin\frac{2\pi}{T_0}t$$

$$i(t) = -C.E\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}}\sin\frac{2\pi}{T_0}t = -E\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$i(t) = -C.E\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}}\sin\frac{2\pi}{T_0}t = -E\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}L.E^2\frac{C}{L}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}C.E^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_m = E_{max}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_t = E_e + E_m = E_{max}\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + E_{max}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_t = E_{max}\left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right)$$

هام

$$E_t = E_{max}$$

❖ يمكن أن نتبت رياضيا أن الطاقة الكلية E_t ثابتة :

لدينا حسب قانون إضافية التوترات : $u_C + u_L = 0$

$$u_C + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$

نضرب في $i = \frac{dq}{dt}$: $\frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + L.i\frac{di}{dt} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}L.i^2\right)=0$$

و بالتالي :

$$E_t=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}L.i^2$$

2 – الطاقة في الدارة RLC :

تعبير الطاقة الكلية المخزونة في الدارة RLC :

$$E_t=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}L.i^2$$

خلال المدة dt تتغير الطاقة الكلية بمقدار dt :

$$\frac{dE_t}{dt}=L.i\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dE_t}{dt}=i\left(L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}\right)$$

$$\frac{dE_t}{dt}=i\left(L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}\right)$$

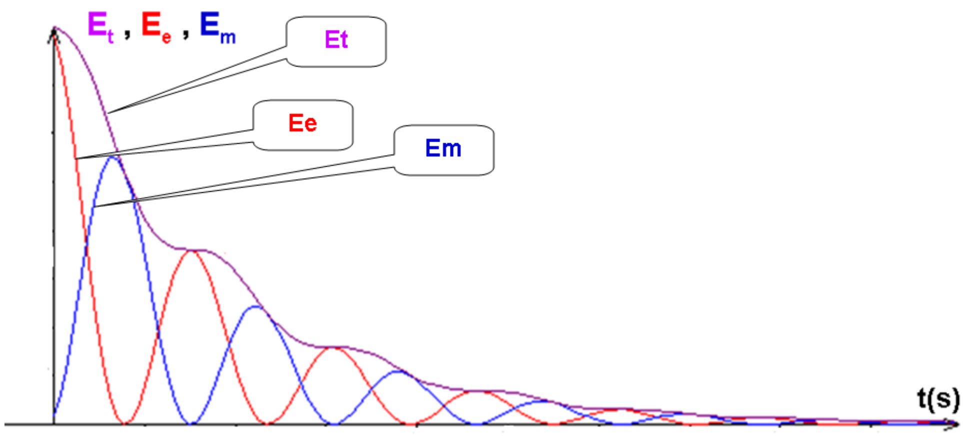
و حسب المعادلة التفاضلية :

$$L\frac{d^2q}{dt}+\frac{q}{C}=-R.\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dE_t}{dt}=-R.i\frac{dq}{dt}=-R.i^2$$

$$dE_t=-R.i^2dt$$

المقدار $R.i^2dt$ يمثل الطاقة الحرارية المستهلكة في الموصل الأومي و التي تتبدد بمفعول جول :



III – صيانة الذبذبات :

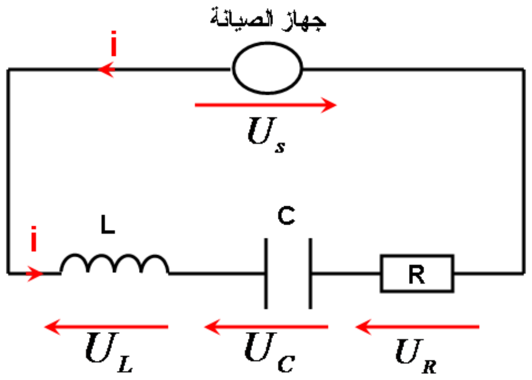
تُمكن صيانة الذبذبات في الدارة RLC من الحصول علة نظام دوري جيبي , بإستعمال جهاز يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدارة بمفعول جول.

جهاز الصيانة عبارة عن مولد يزود الدارة بتوتر u_s يتناسب اطرادا مع شدة التيار i (و هو يتصرف كمقاومة سالبة في اصطلاح المستقبل) :

- في اصطلاح المستقبل : $u_s = -R_0.i$

- في اصطلاح المولد : $u_s = +R_0.i$

R_0 : مقاومة قابلة للضبط.



حسب قانون إضافية التوترات : $u_L + u_R + u_C + u$

$$L\frac{di}{dt} + R.i + u_C - R_0.i = 0$$

$$L.C\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} - R_0C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$L.C\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R - R_0)C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

للحصول على تذبذبات جيبية يجب أن تكتب المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$L.C\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

ويتحقق إذا كان : $R - R_0 = 0 \Rightarrow R_0 = R$