

السقوط الرأسي لجسم صلب

الدرس الحادي عشر

Le chute verticale d'un solide

I. السقوط الرأسي الحر Chute libre

1. تعريف:

السقوط الحر لجسم صلب هو حركة مركز قصوره في مرجع أرضي عندما يخضع لوزنه فقط. ونحصل عليه تجريبيا إذا تم في الفراغ أو في الهواء بالشروط التالية:

- ◆ شكل الجسم انسيابي: أي أن \vec{f} مهمله أمام \vec{P} .
- ◆ الكتلة الحجمية للجسم كبيرة مقارنة مع الكتلة الحجمية للهواء: أي أن \vec{F}_A مهمله أمام \vec{P} .
- ◆ ارتفاعات السقوط صغيرة: تكون من رتبة المتر.

2. دراسة السقوط الحر الرأسي:

ندرس السقوط الرأسي الحر لجسم صلب (S) كتلته m ، في معلم الفضاء $R(O; \vec{k})$ مرتبط بالأرض و الذي نعتبره غاليليا.

المجموعة المدروسة {الجسم (S)}. جرد القوى: \vec{P} الوزن.

و حسب القانون الثاني لنيوتن لدينا: $\vec{P} = m\vec{a}_G$ أي $m\vec{g} = m\vec{a}_G$ و منه $\vec{a}_G = \vec{g}$ (1)

بإسقاط العلاقة (1) على معلم الفضاء $R(O; \vec{k})$ نجد تسارع الجسم (S): $a_G = +g$

و منه نحصل على المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dv_z}{dt} = +g$

عن طريق التكامل لـ a_G نحصل على المعادلة الزمنية لسرعة الجسم (S)، بحيث: $V_z(t) = +g.t + V_{0z}$

حيث V_{0z} إسقاط متجهة السرعة البدئية على المحور (Oz) و هي مقدار جبري.

و بالمثل عن طريق التكامل لـ $V_z(t)$ نحصل على المعادلة الزمنية لحركة الجسم (S)،

بحيث: $z(t) = +\frac{1}{2}.g.t^2 + V_{z0}.t + z_0$ حيث z_0 أنسوب الجسم (S) عند اللحظة $t=0$.

ملاحظة:

- أثناء السقوط الرأسي الحر لجسم صلب ، تكون $\vec{a}_G = \vec{g}$ أي أن متجهة التسارع لمركز قصور الجسم لا تتعلق بالكتلة m للجسم الصلب. (تجربة أنبوب نيوتن)
- أثناء السقوط الرأسي الحر لجسم صلب في مجال الثقالة المنتظم ، يكون مركز قصوره في حركة مستقيمة متغيرة بانتظام لأن مسارها مستقيمي و تسارعها ثابت $a_G = +g = cte \neq 0$.

II. السقوط الرأسى لجسم صلب في مائع.

1. مجال الثقالة و وزن الجسم:

أ. تعريف:

- متجهة مجال الثقالة في مكان محدد هي خارج قسمة وزن الجسم \vec{P} الموجود في هذا المكان على الكتلة m لهذا الجسم بحيث: $\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m}$.
- تتعلق شدة مجال الثقالة g بالارتفاع عن سطح الأرض وبخط العرض (المكان).
- إذن من العلاقة السابقة نستنتج أن أي جسم ذو كتلة في مكان محدد خاضع إلى قوة وزنه المعرفة بالعلاقة المتجهية التالية:

$$\vec{P} = m \times \vec{g}$$

ب. مميزات قوة وزن الجسم:

من خلال العلاقة المتجهية السابقة نستنتج أن \vec{P} نفس مميزات متجهة مجال الثقالة \vec{g} بحيث:

- نقطة التأثير:** مركز ثقل الجسم الصلب.
- خط التأثير:** المستقيم الرأسى المار من مركز ثقل الجسم الصلب (الشاقولي).
- المنحى:** نحو الأسفل.
- الشدة:** تعرف بـ: $P = m.g$ أي $P = \rho.V.g$

2. دافعة أرخميدس:

أ. تعريف:

- دافعة أرخميدس** هي مجموع قوى التماس الضاغطة المطبقة على سطح جسم مغمور كلياً أو جزئياً في مائع (سائل أو غاز) ونرمز لها بالرمز: \vec{F}_A .
- تتعلق شدتها بحجم الجزء المغمور من الجسم وطبيعة المائع وتساوي وزن المائع المزاح وتكتب كما هو جانبه:

ب. مميزات قوة وزن الجسم:

- نقطة التأثير:** مركز ثقل المائع المزاح = مركز ثقل الجزء المغمور.
- خط التأثير:** المستقيم الرأسى المار من نقطة التأثير.
- المنحى:** نحو الأعلى.
- الشدة:** تعرف بـ: $F_A = m_f.g$ أي $F_A = \rho_f.V_f.g$

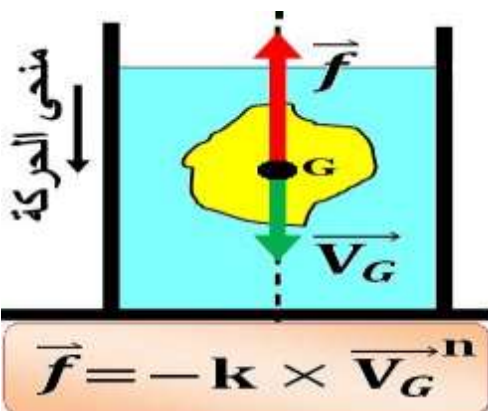
حيث:

m_f : كتلة المائع المزاح بـ (kg). g : شدة مجال الثقالة بـ (N/kg). ρ_f : الكتلة الحجمية للمائع بـ (kg/m³).
 V_f : حجم المائع المزاح بـ (m³)

3. قوة الاحتكاك المائع:

أ. تعريف:

- كل جسم مغمور كلياً أو جزئياً في مائع يخضع إلى قوة موزعة يطبقها عليه هذا المائع، تسمى **قوة الاحتكاك المائع**، ويرمز لها بما يلي: \vec{f} .
- تعرف قوة الاحتكاك المائع بالعلاقة جانبه.



ب. مميزات قوة وزن الجسم:

حيث:

k : ثابتة تتعلق بطبيعة المائع و شكل الجسم.

v_G : سرعة مركز قصور الجسم بـ (m/s)

n : عدد صحيح طبيعي.

- ◆ **نقطة التأثير:** مركز ثقل الجسم الصلب.
- ◆ **خط التأثير:** اتجاه متجهة السرعة لمركز قصور الجسم الصلب.
- ◆ **المنحى:** عكس منحى الحركة أي عكس منحى متجهة السرعة لمركز القصور للجسم الصلب.
- ◆ **الشدة:** تعرف بـ: $f = k \cdot v_G^n$ تتعلق بشكل الجسم و أبعاده و بحالة سطحه و طبيعة السائل و بسرعة الجسم المتحرك.

● ملاحظات:

- تكون $n=1$ إذا كانت السرعة صغيرة فتصبح $f=k \cdot v$ حيث تتعلق k بلزوجة المائع.
- تكون $n=2$ إذا كانت السرعة كبيرة فتصبح $f=k \cdot v^2$ حيث تتعلق k بالكتلة الحجمية للمائع.

I. الدراسة النظرية للسقوط الرأسى لجسم صلب فى مائع.

1. المعادلة التفاضلية للحركة:

ندرس السقوط الرأسى الحر لجسم صلب (S) كتلته m ، فى معلم الفضاء $R(O; \vec{k})$ مرتبط بالأرض و الذى نعتبره غاليليا.

المجموعة المدروسة {الجسم (S)}.

جرد القوى: \vec{P} الوزن - \vec{f} قوة الاحتكاك المائع - \vec{F}_A دافعة أرخميدس

و حسب القانون الثانى لنيوتن لدينا: $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m\vec{a}_G$

$$\text{أى } m \cdot \vec{g} - m_f \cdot \vec{g} - k \cdot v_G^n \cdot \vec{k} = m\vec{a}_G$$

$$\text{أى } m \cdot g - m_f \cdot g - k \cdot v_G^n = m \cdot a_G$$

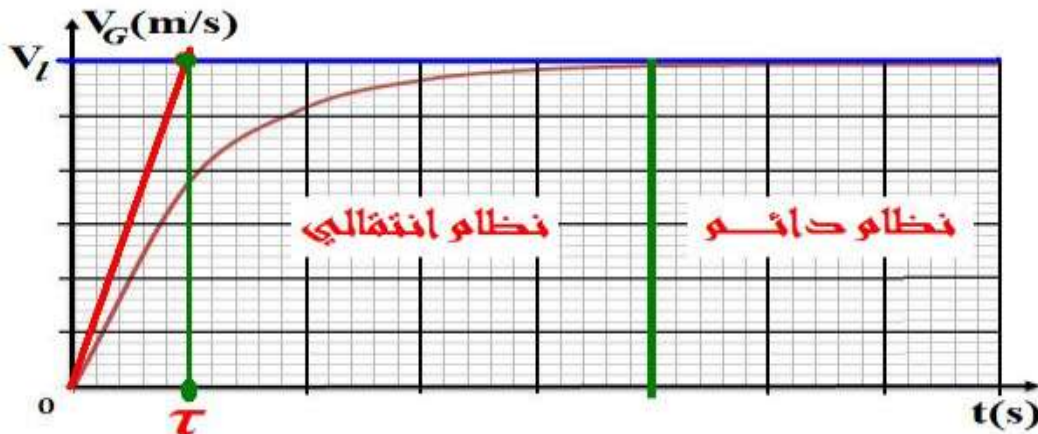
$$\text{أى } g - \frac{m_f}{m} \cdot g - \frac{k}{m} \cdot v_G^n = \frac{dv_G}{dt}$$

ومنه: $g(1 - \frac{m_f}{m}) - \frac{k}{m} \cdot v_G^n = \frac{dv_G}{dt}$ حيث نضع $A = g \cdot (1 - \frac{m_f}{m})$ و $B = \frac{k}{m}$

وبالتالى نحصل على المعادلة التفاضلية لحركة مركز قصور الجسم الصلب أثناء السقوط الرأسى فى المائع:

$$\frac{dv_G}{dt} = A - B \cdot v_G^n$$

2. المقادير المميزة للحركة:



باستعمال برنامج يمكننا من تسجيل مواضع الجسم فى مدد زمنية متساوية ، نحصل على مخطط السرعة جانبه الذى هو منحى السرعة بدلالة الزمن $v_G = f(t)$ مع $v_0=0$.

أ. السرعة الحدية v_1 (النظام الدائم):

من خلال المنحنى نلاحظ أن سرعة الجسم في المائع تتزايد إلى أن تصبح ثابتة، مما يجعلنا أن نتكلم عن النظام الدائم و الذي يتميز بسرعة حدية نرسمه لا بالرمز v_1 .

مبيانيا تساوي السرعة الحدية أرتوب نقطة تقاطع الخط المقارب للمنحنى ومحور الأرتيب. (أنظر الشكل)

$$v_{lim} = \left[\frac{g}{k} (m - m_f) \right]^{\frac{1}{n}} \quad \text{أي} \quad v_{lim} = \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}}$$

نعلم أن : $v_1 = cte$ أي أن $\frac{dv_1}{dt} = 0$ واعتمادا على المعادلة التفاضلية بحيث:
 $\frac{dv_1}{dt} = A - B \cdot v_1^n = 0$ ومنه نجد:

ب. التسارع البدئي a_0 (النظام الانتقالي):

$$a_0 = A = g \cdot \left(1 - \frac{m_f}{m} \right)$$

عند اللحظة $t=0$ نحرر الجسم بدون سرعة بدئية أي $v_0=0$ أي أن $\vec{f} = \vec{0}$ و منه تصبح المعادلة التفاضلية كما يلي:
 $\left(\frac{dv}{dt} \right)_{t=0} = A - B \cdot v_0^n = A$ ومنه نجد أن:

مبيانيا تمثل a_0 المعامل الموجه للمماس للمنحنى $v=f(t)$ عند اللحظة $t=0$.

ج. الزمن المميز للحركة τ :

$$a_0 = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

الزمن المميز للحركة τ هو أفصول نقطة تقاطع المماس للمنحنى $v=f(t)$ مع الخط المقارب للمنحنى $v = v_{lim}$ بحيث:

3. حل المعادلة التفاضلية باستعمال طريقة أولير EULER:

أ. تعريف:

طريقة أولير هي طريقة رقمية تكرارية، يستوجب استعمالها معرفة سرعة مركز قصور الجسم في لحظة t و التي غالبا ما تكون هي السرعة البدئية v_0 عند اللحظة $t=0$.

ب. طريقة الاستعمال:

- معرفة السرعة البدئية v_0 عند اللحظة $t=0$.
- حساب a_0 انطلاقا من المعادلة التفاضلية: $a_0 = A - B \cdot v_0^n$.
- تحديد Δt خطوة الحساب حيث كلما كانت هذه الأخيرة صغيرة كلما كانت النتائج النظرية أقرب إلى النتائج التجريبية، و لتحقيق ذلك غالبا ما نأخذ: $\Delta t = \tau/10$.
- نحسب v_1 عند اللحظة $t_1 = t_0 + \Delta t$ بحيث أن $a_0 = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t}$ أي أن $v_1 = a_0 \cdot \Delta t + v_0$.
- ثم نعيد العملية

بصفة عامة نستعمل العلاقتين التاليتين:

$$a_i = A - B \cdot v_i^n$$

$$v_{i+1} = a_i \cdot \Delta t + v_i$$