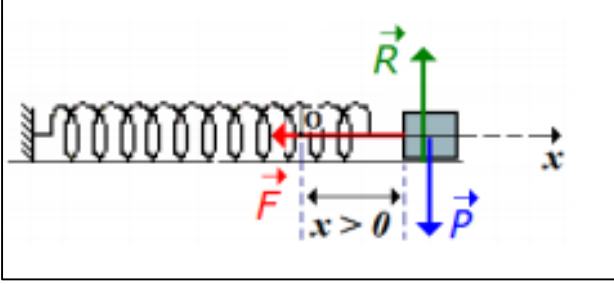


تصحيح تمارين التذبذبات الميكانيكية

تصحيح تمرين 1:



1-المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الجسم S :
القوى المطبقة على الجسم S خلال حركته :

-وزن الجسم : \vec{P} .

-تأثير النابض : \vec{F} .

-تأثير السطح الأفقي : \vec{R} .

نطبق القانون الثاني لنيوتن ، نكتب :

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة على المحور Ox :

$$-F + 0 + 0 = ma_x$$

المعادلة التفاضلية للحركة $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \Leftrightarrow -Kx = m\ddot{x}$

1-2-إثبات الدور الخاص T_0 :

لدينا : $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \Leftrightarrow \dot{x} = -\frac{2\pi}{T_0} X_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

نعوض x و \ddot{x} في المعادلة التفاضلية :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + \frac{K}{m} X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = 0$$

$$X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \left[-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{K}{m} \right] = 0$$

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{K}{m} = 0 \quad \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} \Leftrightarrow$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{0.25}{10}} = 0.99s \approx 1s \quad \text{ت.ع.} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad \text{ت.ع.} \quad \text{نستنتج :}$$

2-2-المعادلة الزمنية للحركة :

حسب الشروط البدئية :

عند $t=0$ لدينا $x = 0$ و $\dot{x} > 0$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ أو } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ أي } x(0) = X_m \cos \varphi = 0$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{2\pi}{T_0} X_m \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{T_0} X_m > 0$$

وبالتالي: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
المعاداة الزمنية تكتب:

$$x(t) = 2 \cdot 10^{-2} \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

3- تعبير السرعة عند اللحظة t:

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = -\frac{2\pi}{T_0} X_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) \dot{x}(t) = -0,126 \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

4- تعبير قوة الإرتداد هو:

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

- عند موضع التوازن $x=0$ تكون $F=0$.
- عند ما تكون $x = X_m$ يكون للقوة \vec{F} والمتجهة \vec{i} منحيان متعاكسان ونفس الإتجاه .
شدة القوة: $F = Kx_m = 10 \times 0,02 = 0,2N$
- عند ما تكون $x = -X_m$ يكون للقوة \vec{F} و \vec{i} نفس الاتجاه ومنحيان متعاكسان .
شدة القوة: $F = 0,2N$

تصحيح التمرين 2:

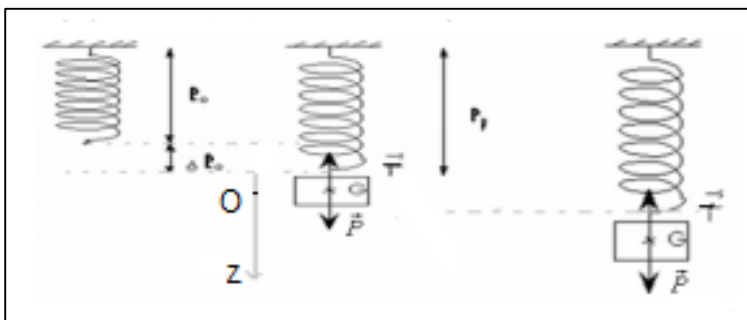
1- أيجاد تعبير إطالة $\Delta\ell$ عند التوازن :
المجموعة المدروسة : { الجسم S }
جهد القوى :

يخضع الجسم S عند التوازن للقوى التالية :
 \vec{P} : وزن الجسم .
 \vec{T}_0 : توتر النابض .
حسب شرط التوازن لدينا : $T_0 = P$

$$K\Delta\ell = mg$$

إطالة النابض عند التوازن هي :

$$\Delta\ell = \frac{mg}{k} = \frac{0,2 \times 10}{20} = 0,1m$$



1-2- المعادلة التفاضلية للحركة:

أثناء الحركة يخضع الجسم S للقوى التالية :
 \vec{P} : وزن الجسم .
 \vec{T} : توتر النابض .
القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة على المحور Oz:

$$P - T = ma_z$$

$$mg - K(\Delta\ell + z) = m\ddot{z}$$

$$mg - K\Delta\ell - Kz = m\ddot{z}$$

حسب شرط التوازن :

$$K\Delta\ell = mg$$

نكتب: $-Kz = m\ddot{z}$

$$\ddot{z} + \frac{K}{m}z = 0$$

المعادلة التفاضلية لحركة النواس المرن الرأسي خطية وبالتالي حلها جيبى ومنه الحركة تذبذبية جيبية.
2-2- المعادلة الزمنية للحركة :
حل المعادلة الزمنية يكتب :

$$z(t) = Z_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

حسب الشروط البدئية لدينا عند $t = 0$: $z(0) = Z_m = 4cm$
المعادلة التفاضلية تكتب:

$$z(0) = Z_m \cos(\varphi) = Z_m$$

$$\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 1$$

لدينا :

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0,1}} = 20 \text{ rad. s}^{-1}$$

المعادلة التفاضلية تكتب:

$$z(t) = 4 \cdot 10^{-2} \cos(20t)$$

2-3- نبين تعبير السرعة:

لنحسب تعبير السرعة :

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0} Z_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

عندما يمر الجسم من موضع التوازن لأول مرة في المنحنى السالب تكون سرعته سالبة وبالتالي نكتب:

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ كما أن } \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) = 1$$

$$\dot{z}(0) = V_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$V_1 = -0,04 \times \sqrt{\frac{40}{0,1}} = -0,8 \text{ m. s}^{-1} \text{ ت.ع.}$$

3- المعادلة الزمنية :

بعد انفصاله عن النابض يخضع الجسم لوزنه فقط .

القانون الثاني لنيوتن يكتب : $\vec{P} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \vec{g} \text{ ومنه } m\vec{a} = m\vec{g}$$

الإسقاط على المحور Oz :

$$a = g = cte$$

المعادلة الزمنية تكتب :

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t + z_0$$

لدينا : $z_0 = 0$ و $V_0 = 0,8 \text{ m.s}^{-1}$ و $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

$$z(t) = \frac{1}{2} \times 10t^2 + 0,8tz(t) = 5t^2 + 0,8t \leftarrow$$

تصحیح تمرین 3 :

1-المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الجسم S :

القوى المطبقة على الجسم S خلال حركته :

-وزن الجسم : \vec{P} .

-تأثير النابض : \vec{F} .

-تأثير السطح الأفقي : \vec{R} .

نطبق القانون الثاني لنيوتن ، نكتب :

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة على المحور Ox :

$$-F + 0 + 0 = ma_x$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \leftarrow -Kx = m\ddot{x} \text{ المعادلة التفاضلية للحركة}$$

2-صلابة النابض K :

المعادلة التفاضلية تكتب : $\ddot{x} + \omega_0^2x = 0$

حيث ω_0 النابض الخاص : $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ أي : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

نعلم أن : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ومنه : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

وبالتالي :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

تعبير الدور الخاص :

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K}$$

نستنتج :

$$K = 4\pi^2 \frac{m}{T_0^2}$$

ت.ع :

$$k = 4\pi^2 \frac{92 \cdot 10^{-3}}{0,6^2} = 10N \cdot m^{-1}$$

3-المعادلة الزمنية :

المعادلة التفاضلية خطية حلها جيبي ، يكتب على الشكل :

$$x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

حسب الشروط البدئية :

عند $t = 0$ لدينا :

$$\begin{cases} X_0 = 4cm > 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{cases}$$

لدينا : $x(0) = X_m \cos\varphi > 0$ أي : $\cos\varphi > 0$

تعبير السرعة :

$$\dot{x}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}X_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$x(0) = -\frac{2\pi}{T_0}X_m \sin\varphi = 0$$

أي أن : $\sin\varphi = 0$ ومنه فإن : $\varphi = 0$ أو $\varphi = \pi$

بما أن : $\cos 0 > 0$ فإن : $\varphi = 0$ و $X_m = 4cm$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0,6} = \frac{10\pi}{3}$$

لدينا : $\omega_0 = \frac{10\pi}{3}$ نستنتج المعادلة الزمنية :

$$x(t) = 4 \cdot 10^{-2} \cos \frac{10\pi}{3} t$$

4- مميزات قوة الإرتداد عند اللحظة $t = 0, 3s$:

متجهة قوة الإرتداد في كل لحظة :

$$\vec{F} = -Kx(t)\vec{i}$$

عند اللحظة $t = 0, 3s$ أفصول مركز قصور الجسم (S) هو :

$$x(t = 0, 3) = 4 \cdot 10^{-2} \cos \frac{10\pi}{3} \times 0, 3 = -4 \cdot 10^{-2} m$$

$$\vec{F} = -Kx(t = 0, 3)\vec{i} = -10 \times (-4 \cdot 10^{-2})\vec{i} = 0, 4 \vec{i}$$

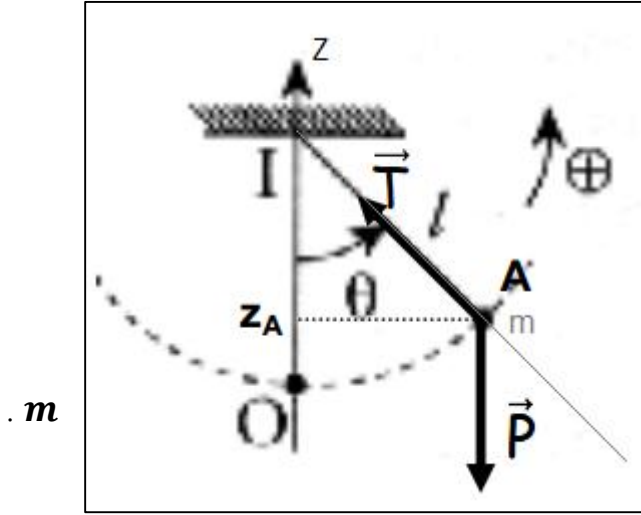
متجهة القوة \vec{F} تكتب :

$$\vec{F} = F_x \vec{i}$$

حيث F_x إحداثي قوة الإرتداد وقيمتها موجبة : $F_x = 0, 4 N > 0$

نستنتج : أن عند اللحظة $t = 0, 3s$ اتجاه و منحى \vec{F} هو نفس اتجاه و منحى \vec{i} (أي في المنحى الموجب) وشدتها : $F = 0, 4N$.

تصحيح التمرين 4:



1- تمثيل القوى :
تخضع الكتلة m لقوتين :
 \vec{P} : وزنها .
 \vec{T} : تأثير الخيط .

2- المعادلة التفاضلية :

تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

نعتبر معلم فرييني (A, \vec{u}, \vec{n}) حيث A موضع الكتلة
الإسقاط على المحور (A, \vec{u}) :

$$-mgsin\theta + 0 = ma_T$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\ell\dot{\theta})}{dt} = \ell \frac{d\dot{\theta}}{dt} : \text{التسارع المماسي}$$

$$a_T = \ell\ddot{\theta} : \text{أي}$$

$$-mgsin\theta = m\ell\ddot{\theta}$$

نستنتج :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} sin\theta = 0$$

المعادلة التفاضلية وهي غير خطية .

3- حالة التذبذبات الصغيرة :

عندما تكون θ صغيرة نكتب : $sin\theta \approx \theta$ المعادلة التفاضلية تصبح:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

4- حل المعادلة التفاضلية:

يكتب الحل على الشكل التالي :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

بالإشتقاق نحصل :

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{2\pi}{T_0} \theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} \theta(t)$$

نعوض في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2} \theta + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

$$\theta \left(-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{g}{\ell} \right) = 0$$

لنتحقق هذه المعادلة مهما تكن t يجب أن يكون :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{g}{\ell} = 0$$

$$\frac{T_0^2}{4\pi^2} = \frac{\ell}{g}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

5- استعمال معادلة الأبعاد نبين أن للدور الخاص T_0 بعد زمني :
لدينا:

$[g] = L \cdot T^{-2}$ و $[\ell] = L$ لأن g متجانسة مع التسارع .
و $[\pi] = 1$ لأن π نعبر عنها ب rad التي ليس لها بعد في الفيزياء .

$$[T_0] = \frac{L^{1/2}}{[g]^{1/2}} = \frac{L^{1/2}}{L^{1/2} \cdot T^{-2 \times 1/2}} = \frac{1}{T^{-1}}$$

نستنتج:

$$[T_0] = T$$

نستنتج أن وحدة T_0 هي الثانية .

تصحیح التمرین 5:

1- إثبات المعادلة الزمنية للحركة :

يخضع القرص للقوى التالية:

\vec{P} : وزن القرص.

\vec{R} : تأثير السلك.

مزدوجة اللي عزمها M_c .

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_c = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

لأن خطأ تأثير القوتين يمران من محو الدوران . $M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$

$$0 + 0 - C\theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

وبالتالي:

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} + C\theta = 0$$

المعادلة التفاضلية لنواس اللي . $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \theta = 0$

النبض الخاص :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}}$$

الدور الخاص:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}}$$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_\Delta}{C}$$

$$C = \frac{4\pi^2 \cdot J_\Delta}{T_0^2}$$

مع : $T_0 = \frac{\Delta t}{15}$ أي $\Delta t = 15T_0$ و $J_\Delta = \frac{1}{2}mr^2$

$$C = \frac{4\pi^2 \cdot \frac{1}{2}mr^2}{\left(\frac{\Delta t}{15}\right)^2} = \frac{2\pi^2 \times 0,2 \times 0,1^2}{\left(\frac{17,2}{15}\right)^2} = 3 \cdot 10^{-2} N.m.rad^{-1}$$

2- المعادلة التفاضلية خطية حلها جيبي يكتب على الشكل:

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

حيث : $\theta_m = \pi rad$ وسع الحركة

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} = \sqrt{\frac{C}{\frac{1}{2}mr^2}} = \sqrt{\frac{0,03}{\frac{1}{2} \times 0,2 \times 0,1^2}} = 5,48 rad.s^{-1}$$

والنبض الخاص :

الطور عند أصل التواريخ :

عند اللحظة $t = 0$ يكون $\theta = \pi$

$$\theta(t = 0) = \theta_m \cos \varphi = \theta_m$$

$\cos \varphi = 1$ أي : $\varphi = 0$

المعادلة الزمنية تكتب:

$$\theta(t) = \pi \cos(5,48t)$$

3- الطاقة الميكانيكية للقرص :

باعتبار المستوى الأفقي المار من G مركز قصور القرص مرجعا لطاقة الوضع الثقالية $E_{pp} = 0$ فالطاقة الميكانيكية تساوي مجموع الطاقة الحركية و طاقة وضع اللي:

$$E_m = E_c + E_{pp}$$

باعتبار الحالة المرجعية لطاقة وضع اللي $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ نكتب:

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C \cdot \theta^2$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $\theta = \pi$ و $\dot{\theta} = 0$ الطاقة الميكانيكية تكتب:

$$E_m = \frac{1}{2}C \cdot \theta_m^2 = \frac{1}{2} \times 0,03 \times \pi^2 = 0,148 J$$

تصحیح تمرین 6:

1-المعادلة التفاضلية :

يخضع القضيب أثناء حركته:

لوزنه \vec{P} وتأثير السلك \vec{T} وتأثير مزدوجة اللي ذات العزم : $M_c = -C\theta$

العلاقة الأساسية لديناميك : $\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_0 \ddot{\theta}$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_c = J_0 \ddot{\theta}$$

لأن خطأ تأثير القوتين يمران من محو الدوران . $M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$

$$0 + 0 - C\theta = J_0 \ddot{\theta}$$

وبالتالي:

$$J_0 \ddot{\theta} + C\theta = 0$$

المعادلة التفاضلية لنواس اللي . $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_0} \theta = 0$

النبض الخاص :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_0}}$$

الدور الخاص:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{C}}$$

2- تعبير الدور الخاص للمجموعة المتذبذبة بعد إضافة السحمتين هو:
الدور الخاص:

$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}}$$

مع : $J_{\Delta} = J_0 + 2md^2$

وبالتالي الدور الخاص:

$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + 2md^2}{C}}$$

3- تحديد قيمة كل من C و J_0 :
لدينا:

$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + 2md^2}{C}} \Leftrightarrow T'_0{}^2 = \frac{4\pi^2 \cdot J_0}{C} + \frac{8\pi^2 \cdot m}{C} d^2$$

المنحنى $T'_0{}^2 = f(d^2)$ عبارة عن دالة تآلفية معادلتها تكتب :

$$T'_0{}^2 = A \cdot d^2 + B$$

حيث A تمثل المعامل الموجه للمستقيم نكتب:

$$A = \frac{\Delta T'_0{}^2}{\Delta d^2} = \frac{(20 - 10)s^2}{(2,5 \cdot 10^{-3} - 0)m^2} = 4 \cdot 10^3 s^2 \cdot m^{-2}$$

و $B = T'_0{}^2$ عندما تكون $d^2 = 0$

مبياناً نجد : $B = 10 m^2$

معادلة المنحنى تكتب :

$$T_0'^2 = 4 \cdot 10^3 d^2 + 10$$

بمقارنة المعادلتين الملونتين نجد:

$$C = \frac{8\pi^2 \times 0,35}{4 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ N.m.rad}^{-1} \quad \text{ت.ع.} \quad 4 \cdot 10^3 = \frac{8\pi^2 m}{c} \Leftrightarrow C = \frac{8\pi^2 m}{4 \cdot 10^3}$$

$$J_0 = \frac{10 \times 2 \cdot 10^{-3}}{\pi^2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2 \quad \text{ت.ع.} \quad 10 = \frac{4\pi^2 J_0}{c} \Leftrightarrow J_0 = \frac{10c}{4\pi^2}$$