تمارين حول حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

تمرين 1 :

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 10\, m.s^{-2}$.

نعتبر المجموعة (S) الممثلة في الشكل (1) والمتكونة من :

- بكرة متجانسة شعاعها $r = 5\, cm$ ملتحمة بساق طولها $MN = 2L = 40\, cm$ يتطابق مركز قصورها مع المركز G للبكرة . المجموعة $\{$الساق ، البكرة$\}$ قابلة للدوران في المستوى الرأسي حول محور أفقي (Δ) ثابت يمر بالمركز G .

عزم قصور المجموعة بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ .

- خيط غير مدود كتلته مهملة ملفوف حول مجرى البكرة و ثبت أحد طرفيه بجسم صلب (S_1) كتلته $m_1 = 0{,}8\, kg$ ومركز قصوره G_1 . الجسم الصلب (S_1) قابل للانزلاق على مستوى مائل بزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي وفق الخط الأكبر ميلا .

نعتبر أن الخيط لا ينزلق على مجرى البكرة أثناء الحركة .

نحرر المجموعة (S) بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t = 0$ حيث يكون G_1 منطبقا مع الاصل O للمعلم $(O\,,\vec{i}\,)$. نمعلم عند كل لحظة موضع G_1 بالافصول x .

1-يمثل منحنى الشكل (2) تغيرات V^2 مربع السرعة للجسم (S) بدلالة x .

1.1-باستعمال المعادلات الزمنية للحركة المستقيمية المتغيرة بانتظام بين العلاقة : $V^2 = 2ax$

2.1-باستعمال المبيان $V^2 = f(x)$ حدد a تسارع الجسم (S_1) واستنتج قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للمجموعة $\{$الساق ، البكرة$\}$.

2-باعتبار المجموعة $\{$الساق ، البكرة$\}$.

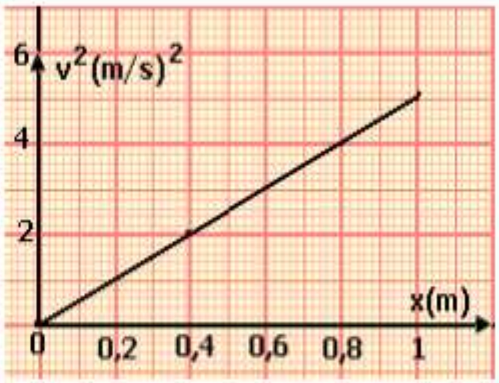
1.2- بالاعتماد على الدراسة التحريكية بين ان تعبير التسارع a يكتب على الشكل : $\boldsymbol{a = \dfrac{m_1.g.sin\alpha}{m_1+\frac{J_\Delta}{r^2}}}$

2.2- استنتج قيمة J_Δ عزم قصور المجموعة .

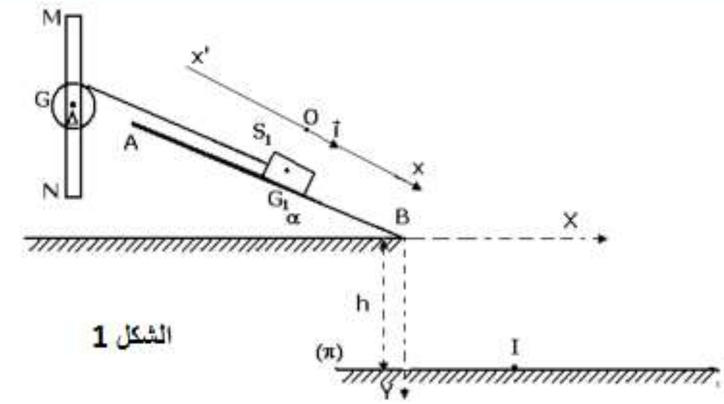
3-ينفصل الجسم (S_1) عن الخيط لحظة مروره بالنقطة B ذات الأفصول $x_B = 0{,}8\, m$ فيسقط عند النقطة I من المستوى الأفقي (π) الذي يوجد على مسافة $h = 1\, m$ من النقطة B .

1.3- أحسب السرعة V_B للجسم (S_1) عند النقطة B واستنتج السرعة الخطية V_M للطرف M للساق بعد انفصال الجسم (S_1) عن الخيط .

2.3- أوجد إحداثيات النقطة I في المعلم $(\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{BY}\,)$.



الشكل 2



الشكل 1

التصحيح

1.1-إثبات العلاقة : $\boldsymbol{V^2 = 2a.x}$

المعادلات الزمنية للحركة المستقيمية المتغيرة بانتظام تكتب :

$$\begin{cases} V = a.t + V_0 \\ x = \frac{1}{2}a.t^2 + V_0.t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = a.t \\ x = \frac{1}{2}a.t^2 \end{cases}$$

مع : $V_0 = 0$ و $x_0 = 0$

نقصي الزمن t من المعادلتين الزمنيتين نحصل على :

$$\begin{cases} V^2 = a^2.t^2 \\ x = \dfrac{1}{2}a.t^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{V^2}{x} = \frac{a^2.t^2}{\frac{1}{2}a.t^2} = 2a \Rightarrow \boldsymbol{V^2 = 2a.x}$$

2.1-تحديد $\boldsymbol{a}$ و استنتاج $\boldsymbol{\ddot{\theta}}$

المنحنى الممثل ل $V^2 = f(x)$ عبارة عن دالة خطية معادلتها تكتب : $V^2 = K.x$

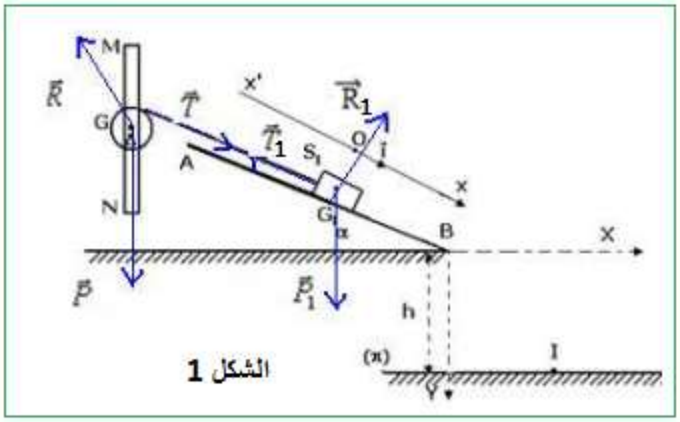
مع K المعامل الموجه للمنحنى : $K = \frac{\Delta V^2}{\Delta x} = \frac{2-0}{0{,}4-0} = 5\,m.s^{-2}$

حسب العلاقة $V^2 = 2a.x$ نستنتج : $2a = K$ أي: $a = \frac{K}{2} = 2{,}5\,m.s^{-1}$

حساب التسارع الزاوي للمجموعة : $\boldsymbol{\ddot{\theta} = \frac{a}{r} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2{,}5}{5\times10^{-2}} = 50\,rad.s^{-2}}$

1.2-إثبات تعبير التسارع

الدراسة التحريكية للجسم (S_1)



الشكل 1

المجموعة المدروسة : الجسم (S_1)

جرد القوى : وزن الجسم $\vec{P}_1$ ، تأثير السطح المائل $\vec{R}_1$ و تأثير الخيط $\vec{T}_1$

المعلم المرتبط بالارض نعتبره غاليليا .

تطبق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F}_{ext} = m_1.\vec{a}$ ومنه :

$$\vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 = m_1.\vec{a}$$

اسقاط العلاقة على المحور $(O, \vec{\imath})$:

$$P_1 sin\alpha - T_1 = m_1.a \Rightarrow T_1 = m_1.g.sin\alpha - m_1.a \quad (1) \Rightarrow T_1 = m_1.(g.sin\alpha - a)$$

الدراسة التحريكية للبكرة (S)

المجموعة المدروسة : البكرة (S)

جرد القوى : وزن البكرة $\vec{P}$ ، تأثير محور الدوران $\vec{R}$ و تأثير الخيط $\vec{T}$.

نطبق العلاقة الاساسية للديناميك في حالة الدوران نكتب : $\sum \mathrm{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$\mathrm{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathrm{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathrm{M}_\Delta(\vec{T}) = J_\Delta.\ddot{\theta} \quad (2)$$

مع : $\mathrm{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathrm{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ خط تأثير القوتين يقاطع محور الدوران

باعتبار المنحى الموجب للدوران نكتب : $\mathrm{M}_\Delta(\vec{T}) = T.r$

المعادلة (2) تكتب : $T.r = J_\Delta.\ddot{\theta}$

بما ان الخيط غير مدود و كتلته مهملة فإن : $T = T_1$ كما انه لا ينزلق على مجرى البكرة ومنه : $a = r.\ddot{\theta}$ أي: $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$

لدينا : $T.r = J_\Delta.\ddot{\theta}$ أي: $(m_1.g.sin\alpha - m_1.a).r = J_\Delta.\frac{a}{r}$

$$m_1.g.sin\alpha = m_1.a + J_\Delta.\frac{a}{r^2} \Rightarrow m_1.g.sin\alpha = a\left(m_1 + \frac{J_\Delta}{r^2}\right) \Rightarrow \boldsymbol{a = \frac{m_1.g.sin\alpha}{m_1 + \frac{J_\Delta}{r^2}}}$$

2.2-حساب J_Δ

حسب العلاقة : $(m_1.g.sin\alpha - m_1.a).r = J_\Delta.\frac{a}{r}$ نحصل على : $\boldsymbol{J_\Delta = \frac{(m_1.g.sin\alpha - m_1.a).r^2}{a}}$

ت.ع :

$$\boldsymbol{J_\Delta = \frac{(0,8 \times 10 \times \sin(30°) - 0,8 \times 2,5) \times (5 \times 10^{-2})^2}{2,5} = 2.10^{-3}\ kg.m^2}$$

1.3-حساب V_B

عند الافصول $x_B = 0{,}8\ m$ تكتب المعادلة $V^2 = 2a.x$ على الشكل : $V_B{}^2 = 2a.x_B$

أي: $V_B = \sqrt{2a.x_B}$ ت.ع : $V_B = \sqrt{2 \times 2,5 \times 0,8} = 2\ m.s^{-1}$

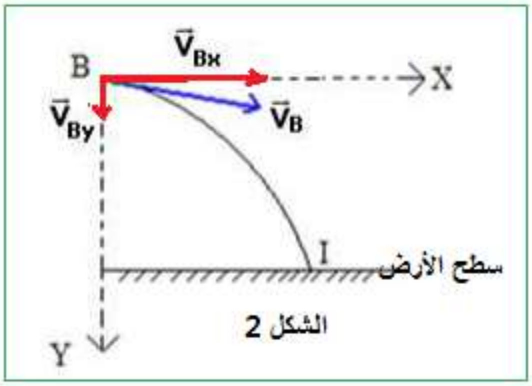
ملحوظة :

يمكن استعمال مبيان الشكل 2 حيث عند $x_B = 0,8\ m$ نجد : ${V_B}^2 = 4\ m^2.s^2$ أي: $V_B = 2\ m.s^{-1}$

استنتاج السرعة الخطية للطرف M :

$$\dot{\theta} = \frac{V_B}{r} = \frac{V_M}{L} \Longrightarrow V_M = \frac{L}{r}.V_B \Longrightarrow V_M = \frac{20}{5} \times 2 = 8\ m.s^{-1}$$

2.3-تحديد إحداثيات النقطة I



الشكل 2

نحدد اولا معادلة المسار :

اجسم (S_1) تخضع في مجال الثقالة الى $\vec{P}$ وزنه فقط

نطبق القانون الثاني لنيوتن :

$\vec{P} = m_1.\vec{a}_G$ أي : $m_1.\vec{g} = m_1.\vec{a}_G$ وبالتالي : $\vec{a}_G = \vec{g}$

الاسقاط على المحورين (Bx) و (By) :

إحداثيات متجهة تسارع مركز القصور :

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

حسب الشروط البدئية :

$$\vec{V}_B \begin{cases} V_{Bx} = V_B.cos\alpha \\ V_{BY} = V_B.sin\alpha \end{cases} \quad ; \quad \overrightarrow{BG}_0 \begin{cases} x_B = 0 \\ y_B = 0 \end{cases}$$

إحداثيات متجهة سرعة مركز القصور :

$$\vec{V}_G \begin{cases} V_x = V_{Bx} = V_B.cos\alpha \\ V_y = g.t + V_{By} = -g.t + V_B.sin\alpha \end{cases}$$

إحداثيات مركز القصور :

$$\begin{cases} x(t) = V_B.cos\alpha.t + x_B \\ y(t) = \dfrac{1}{2}g.t^2 + V_B.sin\alpha.t + y_B \end{cases}$$

المعادلات الزمنية للحركة :

$$x(t) = V_B.cos\alpha.t$$

$$y(t) = \frac{1}{2}g.t^2 + V_B.sin\alpha.t$$

معادلة المسار:

$t = \frac{x}{V_B.cos\alpha}$ نعوض t في المعادلة الزمنية : $y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + V_B.sin\alpha.$ نحصل على :

$$y = \frac{1}{2}g.\left(\frac{x}{V_B.cos\alpha}\right)^2 + V_B.sin\alpha.\frac{x}{V_B.cos\alpha}$$

$$y = \frac{g}{2V_B^2.cos^2\alpha}.x^2 + x.tan\alpha$$

إحداثيات I نقطة السقوط

ليكن $y_B = h$ أرتوب النقطة B و $x_B > 0$ أفصولها موجب ، معادلة المسار تكتب :

$$h = \frac{g}{2V_B^2 . cos^2\alpha} . {x_B}^2 + x_B . tan\alpha$$

$$\frac{g}{2V_B^2 . cos^2\alpha} . {x_B}^2 + x_B . tan\alpha - h = 0$$

$$\frac{10}{2 \times 2^2 . cos^2(30°)} . {x_B}^2 + x_B . \tan(30°) - 1 = 0$$

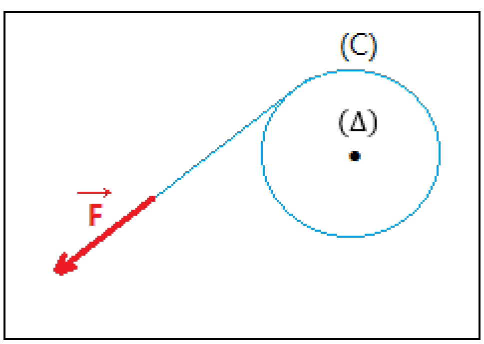
$$1,67\ x_B^2 + 0,577 x_B - 1 = 0$$

لدينا : $\Delta = 0,577^2 + 4 \times 1,67 \times 1 = 7,01 > 0$ المعادلة تقبل حلين هما :

$$\begin{cases} x_{B1} = \dfrac{-0,577 + \sqrt{7,01}}{2 \times 1,67} = 0,62\ m\ m > 0 \\ x_{B2} = \dfrac{-0,58 - \sqrt{2,44}}{2 \times 0,42} = -0,96\ m < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{الحل الأنسب هو}} x_I = 0,62\ m$$

إحداثيات I نقطة السقوط هي : $B(x_I = 0,62\ m\ ; y_I = 0,62\ m\ )$

تمرين 2 :



يمكن لأسطوانة (C) متجانسة كتلتها $m_1 = 6\ kg$ وشعاعها $R = 12\ cm$ ، الدوران حول محور أفقي ينطبق مع محورها . حول الاسطوانة نلف خيط كتلته مهملة وغير قابل للامتداد (أنظر الشكل جانبه) .

معطيات : عزم قصور الأسطوانة بالنسبة لمحورها : $J_\Delta = \frac{1}{2} m_1 . R^2$

$g = 10\ m.s^{-2}$

الجزء الاول : دوران الاسطوانة تحت تأثير الخيط

1-يطبق على الطرف الحر للخيط قوة ثابتة $\vec{F}$ ، نهمل الاحتكاكات في هذا الجزء .

1.1-ما طبيعة حركة الاسطوانة (C) ؟

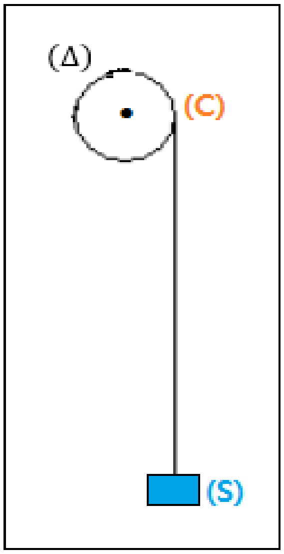
2.1-بعد المدة $t_1 = 1,5\ s$ يكون طول الخيط المنشور هو $x = 2,25\ m$. عبر بدلالة المعطيات اللازمة ثم احسب :

- الزاوية θ_1 التي دارت بها الأسطوانة (C) خلال المدة t_1 .
- تسارعها الزاوي $\ddot{\theta}$.
- شدة القوة $\vec{F}$.

2-عندما تصل سرعة سرعة الاسطوانة (C) إلى القيمة $\dot{\theta}_0 = 10\ rad.s^{-1}$ ، نحدف القوة $\vec{F}$ فتتوقف الاسطوانة (C) بعد المدة $t_2 = 50\ s$ من لحظة حدف القوة $\vec{F}$.

1.2-عبر عن التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ ، الذي نفترضه ثابتا ، بدلالة $\dot{\theta}_0$ و t_2 ثم أحسب قيمته .
2.2-عبر بدلالة m_1 و R و t_2 عن M_f عزم مزدوجة الاحتكاك المطبقة على (C) الذي نفترضه ثابتا . ثم أحسب قيمته .

الجزء الثاني : الدوران والإزاحة
يلف الخيط من جديد حول الأسطوانة (C) وفي طرفه يعلق جسم صلب كتلته m_2 ثم نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية (أنظر الشكل جانبه) .
بعد مدة زمنية $t_3 = 5\,s$ من بداية الحركة تصل سرعة الجسم إلى $V = 10\,m.s^{-1}$.
نهمل الاحتكاكات .
1-أثبت العلاقة بين السرعة الزاوية للأسطوانة (C) والسرعة الخطية للجسم (S) ، ثم استنتج العلاقة بين التسارع الخطي ل (S) والتسارع الزاوي ل (C)
2-بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على (S) والعلاقة الاساسية للديناميك في حالة الدوران على (C) أثبت أن حركة (S) متسارعة بانتظام معبرا عن تسارعها بدلالة m_1 و m_2 و g .
3-أحسب قيمة الكتلة m_2 .



التصحيح

الجزء الاول :

1.1-طبيعة الدوران

تخضع الأسطوانة (C) للقوى التالية : $\vec{P}$: وزنها ، $\vec{R}$: تأثير محور الدوران و $\vec{F}$: توتر الخيط

نطبق العلاقة الاساسية للديناميك في حالة الدوران نكتب : $\sum \mathrm{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$\mathrm{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathrm{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathrm{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta.\ddot{\theta} \quad (2)$$

مع : $\mathrm{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathrm{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ خط تأثير القوتين يقاطع محور الدوران

باعتبار المنحى الموجب للدوران نكتب : $\mathrm{M}_\Delta(\vec{F}) = F.R$

المعادلة (2) تكتب : $F.R = J_\Delta.\ddot{\theta}$

نستنتج تعبير التسارع الزاوي : $\ddot{\theta} = \frac{F.R}{J_\Delta}$

باعتبار $F = Cte$ تكون للأسطوانة حركة دورانية متغيرة بانتظام (متسارعة).

2.1-زاوية الدوران

العلاقة بين الافصول الزاوي (زاوية الدوران) والأفصول المنحني لنقطة من محيط القرص هي :

$$s = R.\theta_1$$

باعتبار الخيط غير قابل للامتداد ولا ينزلق على مجرى الأسطوانة نكتب : $x = s$ وبالتالي :

$$\boldsymbol{\theta_1 = \frac{x}{R} \quad \Rightarrow \theta_1 = \frac{2,25}{0,12} \Rightarrow \theta_1 = 18,75\,rad}$$

-التسارع الزاوي :

المعادلة الزمنية لحركة دوانية متغيرة بانتظام هي : $\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.t^2 + \dot{\theta}_0.t + \theta_0$

باعتبار الشروط البدئية $\theta_0 = 0$ و $\dot{\theta}_0 = 0$ (المجموعة اطلقت بدون سرعة بدئية)

المعادلة الزمنية تصبح : $\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.t^2$ وعند اللحظة t_1 نكتب : $\theta_1 = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.t_1^2$

نستنتج التسارع الزاوي : $\boldsymbol{\ddot{\theta} = \frac{2\theta_1}{t_1^2} \Longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{2\times18,75}{1,5^2} \Longrightarrow \ddot{\theta} = 16,7\ rad.s^{-2}}$

-شدة القوة $\vec{F}$

حسب نتيجة السؤال 1 نكتب : $F = \frac{J_\Delta.\ddot{\theta}}{R}$ مع $J_\Delta = \frac{1}{2}m_1.R^2$ إذن : $F = \frac{1}{2}\frac{m.R^2.\ddot{\theta}}{R}$

$$\boldsymbol{F = \frac{1}{2}m_1.R.\ddot{\theta} \Longrightarrow F = \frac{1}{2}\times 6\times 0,12\times 16,7 \Longrightarrow F = 6\ N}$$

1.2-التعبير عن التسارع الزاوي خلال مرحة التوقف

باعبار التسارع الزاوي ثابتا خلال هذه المرحلة نكتب : $\ddot{\theta} = \frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t} = \frac{0-\dot{\theta}_0}{t_2-0}$

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} = -\frac{\dot{\theta}_0}{t_2} \Longrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{10}{50} \Longrightarrow \ddot{\theta} = -0,2\ rad.s^{-2}}$$

2.2-عزم مزدوجة الاحتكاك

تخضع الأسطوانة (C) للقوى التالية :

$\vec{P}$: وزنها و $\vec{R}$: تأثير محور الدوران و لتأثير مزدوجة الاحتكاك عزمها M_f .

نطبق العلاقة الاساسية للديناميك في حالة الدوران نكتب : $\sum \mathrm{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$$\mathrm{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathrm{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathrm{M_f} = J_\Delta.\ddot{\theta} \quad (2)$$

مع : $\mathrm{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathrm{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ خط تأثير القوتين يقاطع محور الدوران

نستنتج : $\mathrm{M_f} = J_\Delta.\ddot{\theta}$ باعتبار $J_\Delta = \frac{1}{2}m_1.R^2$ و $\ddot{\theta} = -\frac{\dot{\theta}_0}{t_2}$ تعبير M_f يصبح :

$$\mathrm{M_f} = \frac{1}{2}m_1.R^2.\left(-\frac{\dot{\theta}_0}{t_2}\right) \Longrightarrow \boldsymbol{M_f = -\frac{m_1.R^2.\dot{\theta}_0}{2t_2}}$$

$$\boldsymbol{M_f = -\frac{6\times 0,12^2\times 10}{2\times 50} = -8,64.10^{-3}\ N.m}$$

الجزء الثاني :

1-العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية

بما ان الخيط غير قابل للامتداد و لا ينزلق على مجرى الاسطوانة فإن المتسوية تتحقق : $x = s$

حيث x : أفصول نقطة من الجسم (S) و s الأفصول المنحني من نقطة من محيط الأسطوانة .

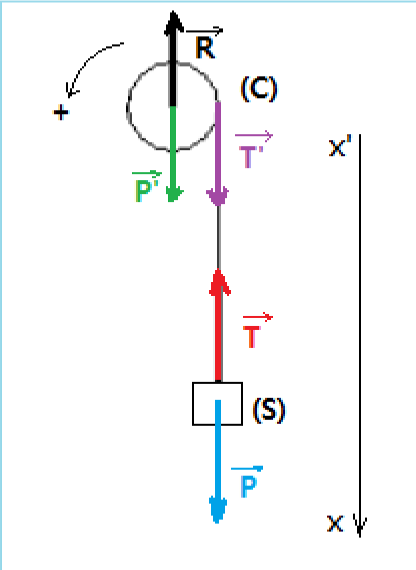
نكتب : $\boldsymbol{x = R.\theta}$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن نستنتج العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية :

$$\boldsymbol{V = R.\dot{\theta}}$$

بالاشتقاق للمرة الثانية بالنسبة للزمن نستنتج العلاقة بين التسارع الخطي والتسارع الزاوي :

$$\boldsymbol{a = R.\ddot{\theta}}$$



2-طبيعة حركة (S)

يخضع الجسم (S) لقوتين هما : $\vec{P}$ وزنه و $\vec{T}$: توتر الخيط

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الجسم (S) : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$

الإسقاط على المحور Ox : $P - T = m_2.a$ أي: $T = m_2 g - m_2.a$ أو : $T = m_2.(g-a)$

تخضع الأسطوانة (C) للقوى التالية :

$\vec{P'}$: وزنها و $\vec{R}$: تأثير محور الدوران و تأثير الخيط $\vec{T'}$.

نطبق العلاقة الاساسية للديناميك في حالة الدوران نكتب : $\sum \mathrm{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$\mathrm{M}_\Delta(\vec{P'}) + \mathrm{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathrm{M}_\Delta(\vec{T'}) = J_\Delta.\ddot{\theta} \quad (1)$$

مع : $\mathrm{M}_\Delta\left(\vec{P'}\right) = \mathrm{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ خط تأثير القوتين يقاطع محور الدوران

حسب المنحى الموجب للدوران $\mathrm{M}_\Delta\left(\vec{T'}\right) = T'.R$

العلاقة (1) تكتب : $T'.R = J_\Delta.\ddot{\theta}$

بما ان كتلة الخيط مهملة فإن : $T = T'$ كما ان : $T = m_2 g - m_2.a$ و $J_\Delta = \frac{1}{2}m_1.R^2$ و $\ddot{\theta} = \frac{a}{R}$

العلاقة $T'.R = J_\Delta.\ddot{\theta}$ تكتب : $(m_2 g - m_2.a).R = \frac{1}{2}m_1.R^2.\frac{a}{R}$ اي: $m_2 g - m_2.a = \frac{1}{2}m_1.a$

$$a\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right) = m_2.g \implies a = \frac{m_2}{\frac{1}{2}m_1 + m_2}.g$$

بما ان التسارع a ثابت ، نستنتج ان حركة (S) مستقيمية متغيرة بانتظام .

3-كتلة الجسم (S)

حسب العلاقة : $m_2 g - m_2.a = \frac{1}{2}m_1.a$ نكتب : $m_2(g-a) = \frac{1}{2}m_1.a$

$$\boldsymbol{m_2 = \frac{m_1.a}{2(g-a)}}$$

تحديد التسارع a لدينا : $a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V-0}{t_3-0} = \frac{V}{t_3}$ عدديا نجد : $a = \frac{10}{5} = 2m.s^{-2}$

حساب m_2 : $\boldsymbol{m_2 = \frac{6\times2}{2\times(10-2)} = 0,75\ kg \implies m_2 = 750\ g}$