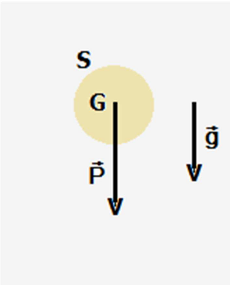
# تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

## السقوط الرأسي لجسم صلب

### I ـ مجال الثقالة

**تعريف**

جميع الأجسام الموجودة على سطح الأرض أو في الحيز المحيط بها تخضع لقوة مطبقة من طرف الأرض تسمى بوزن الجسم ونرمز لها ب $\vec{P}$ . و هي ناتجة عن المجال المحدث من طرف الأرض يسمى بمجال الثقالة ونرمز له ب $\vec{g}$ بحيث أن :




$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}} \qquad (1)$$

مميزات متجهة مجال الثقالة $\vec{g}$ :

ـ الاتجاه : الرأسي المار من مركز قصور الجسم .

ـ المنحى : نحو الأرض

ـ المنظم : شدة مجال الثقالة ونعبر عنها بالوحدة $N/kg^{-1}$

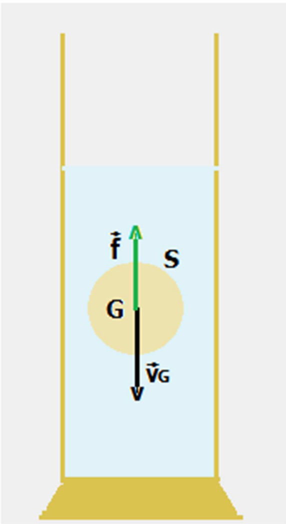
**ملحوظة :** تتعلق شدة مجال الثقالة بالارتفاع وبخط العرض .

### II ـ القوى المطبقة من طرف مائع على جسم صلب .

**1ـ قوى الاحتكاك المائع**

كل جسم في حركة داخل مائع ، يخضع إلى قوى احتكاك مطبقة عليه من طرف هدا الأخير . ( قوى التماس وموزعة )

تكافئ هذه القوى ، قوة وحيدة تسمى **قوة الاحتكاك المائع** ورمز لها ب $\vec{f}$




**مميزات قوة الاحتكاك المائع :**

الأصل : مركز قصور الجسم

خط تأثيرها هو اتجاه متجهة سرعة مركز القصور G للجسم

المنحى : عكس منحى متجهة مركز فصور الجسم

الشدة : تتعلق بشكل الجسم وبأبعاده ، وبحالة سطحه ، وتتعلق كذلك بلزوجة المائع وبسرعة الجسم المتحرك بالنسبة للمائع

نمنذج شدتها بالعلاقة التالية : $f = k.v_G^n$ حيث k ثابتة تتعلق بطبيعة المائع وبشكل الجسم الصلب

نضع $v_G = v$ ، فتصبح العلاقة

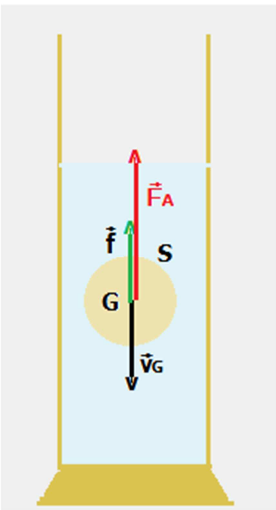
$$\boxed{f = k.v^n} \qquad (2)$$

**ملحوظة :** عندما تكون قيمة السرعة صغيرة ( أقل من $1cm/s$ ) ، نأخذ n=1 ، فتصبح العلاقة السابقة كالأتي : $f = k.v$ ، في هذه الحالة تتعلق k بلزوجة المائع .

عندما تكون قيمة السرعة v متوسطة ( أكبر من $1cm/s$ وأقل من $10m/s$ ) ، نأخذ n=2 تصبح العلاقة السابقة $f = k.v^2$ في هذه الحالة ، لاتتعلق k بلزوجة المائع ، بل تتعلق بكتلته الحجمية.

**2 ـ دافعة أرخميدس**

يخضع كل جسم مغمور كليا أو جزئيا في مائع لقوى تماس ضاغطة مطبقة على سطح الجسم ، يسمي مجموع هذه القوى **بدافعة أرخميدس .**




مميزاتها هي :

ـ نقطة تأثيرها : مركز ثقل المائع المزاح

ـ الانجاه : الخط الرأسي

ـ المنحى : نحو الأعلى

ـ الشدة : تساوي شدة وزن الحجم المزاح للمائع : $\boxed{F_A = m_0 g = \rho_f .V.g \qquad (3)}$ بحيث أن $m_0$ كتلة المائع المزاح و $\rho_f$ الكتلة الحجمية للمائع ب $kg/m^3$ و $V$ الحجم المزاح للمائع $(m^3)$ و g شدة مجال الثقالة (N/kg) أو $m/s^2$ ، $F_A$ شدة دافعة أرخميدس (N)

### III ـ السقوط الرأسي لجسم صلب بالإحتكاك

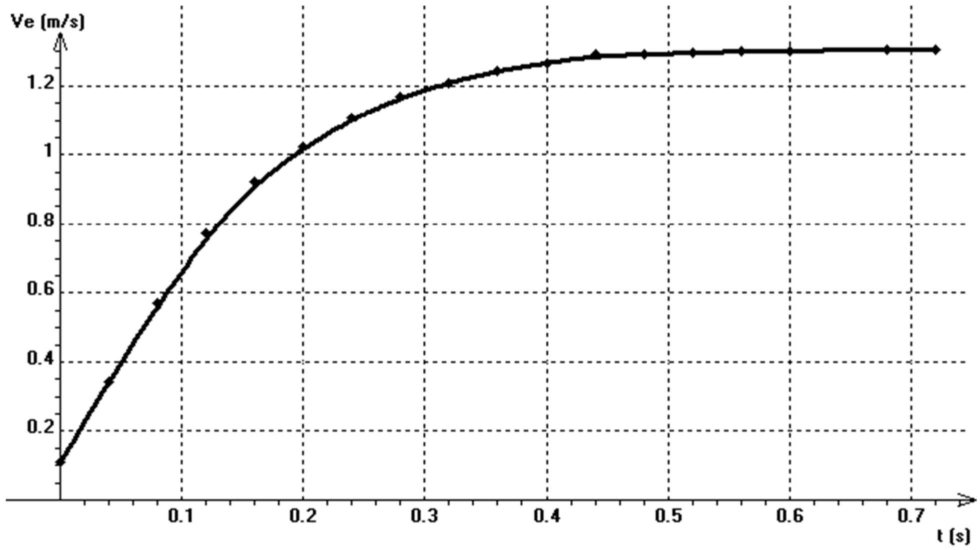
#### 1 ـ الدراسة التجريبية

الهدف من التجربة : نمذجة حركة سقوط كرية في مائع بطريقة أولير

العدة التجريبية : مخبار مدرج من فئة $1\ell$ . محلول الغليسيرول المخفف كتلته الحجمية $\rho_f = 1{,}07 g/m\ell$ ، كرية فولاذية كتلتها $m_b$=6,88g وشعاعها R=5,9mm نسجل حركة الكرية في السائل بواسطة كاميرا رقمية ونحفظ الشريط المسجل لحركة الكرية في ملف من نوع (avi) .

نستعمل برنم أفيميكا Avimeca لعملية تحديد مواضع النقط الموافقة لمواضع G مركز قصور الكرية خلال سقوطها مع اختيار محور رأسي موجه نحو الأسفل فنكتب قيم الأزواج (t,y) .

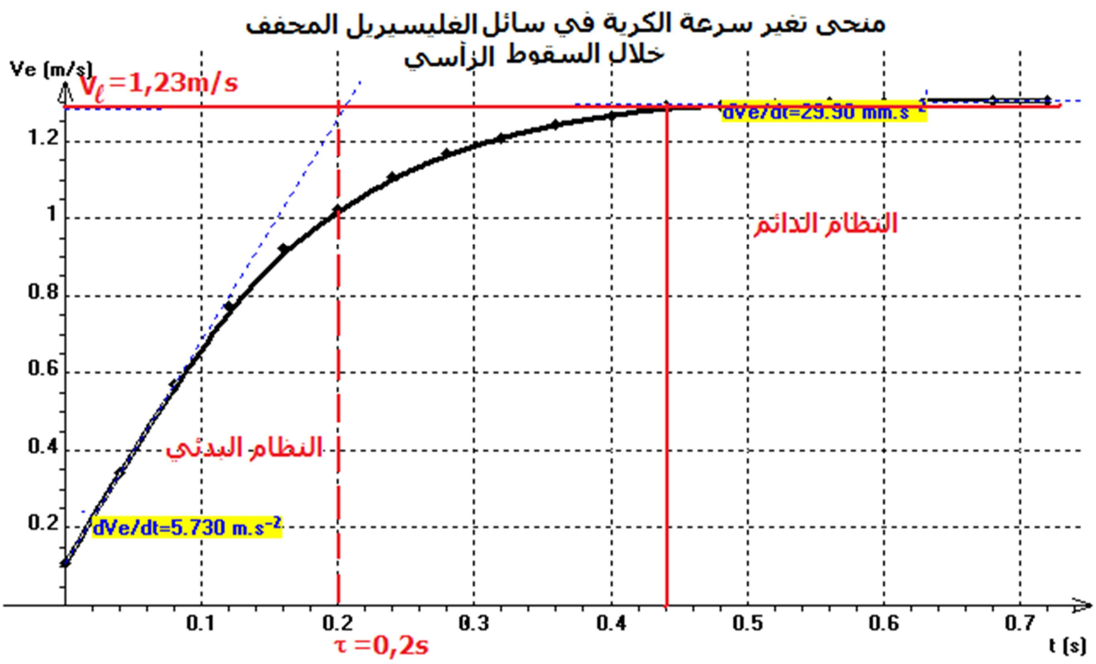
نرسل جدول القياس إلى برنم المجدول وراسم المنحنيات regressi ، وبعد تعريف إحداثية متجهة السرعة $\vec{v}_G$ وهي $v = \frac{dy}{dt}$ ، يقوم البرنم بحساب قيم v ثم رسم منحنى تغيرات v بدلالة الزمن t على الشاشة ، ثم نحفظ الملف .




**استثمار**

**1 ـ استغلال المنحنى v=f(t)**

المنحنى المحصل عليه بواسطة البرنم Regressi :



# تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

**أ ـ يبرز المنحنى وجود نظامين ، حدد مبيانيا المجال الزمني لكل نظام مبرزا طبيعة حركة G مركز قصور الكرية في كل نظام .**

ـ النظام البدئي : $v_{exp}$ دالة زمنية متغيرة

ـ في النظام الدائم : $v_{exp} \simeq v_\ell$ أي تبقى ثابتة خلال الزمن .

**ب ـ هل تتزايد أم تتناقص متجهة التسارع $\vec{a}_G$ مركز قصور الكرية خلال الحركة ؟ علل جوابك .**

ـ في النظام البدئي : $a_G(t) = \frac{\Delta v_G}{\Delta t}$ عمليا يمثل هذا التغير المعامل الموجه للدالة $v_G$ عند كل لحظة t ، ومن خلال المنحنى يلاحظ أن المعامل الموجه يتناقص مع الزمن t و كذلك التسارع $a_G$ :

ـ عند $t = 0$ لدينا $\left(\frac{dv_G}{dt}\right)_{t=0}$ قصوية

ـ في النظام الدائم $t \to +\infty$ لدينا $\left(\frac{dv_G}{dt}\right)_{t=+\infty} = 0$ لكون أن $v_G = v_\ell$ أي أن حركة الكرية رأسية منتظمة .

وبالتالي فإن متجهة التسارع تتناقص إلى أن تأخذ قيمة منعدمة .

**ج ـ مثل على الشكل الخط المقارب للمنحنى .**

**يمثل نقطة تقاطع هذا الخط مع محور السرعات قيمة السرعة الحدية $v_\ell$ . حدد قيمة $v_\ell$ .**

تحديد قيمة $v_\ell$ : $v_\ell = 1,23 m/s$

**د ـ مثل في نفس المنحنى ، المماس للمنحنى عند الأصل O . يتقاطع هذا المماس على الخط المقارب في نقطة أفصولها $\tau$ نسميه الزمن المميز . عين قيمة $\tau$ .**

لدينا $\tau = 0,2s$

**ه ـ ما قيمة $a_0$ لإحداثية $\vec{a}_0$ على المحور الرأسي عند اللحظة t=0 ؟**

قيمة $a_0$ ، المعامل الموجه في النقطة t=0 :

$$a_0 = \left(\frac{dv_G}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\Delta v_G}{\Delta t} = \frac{v_\ell}{\tau} = 6.12 m/s^2$$

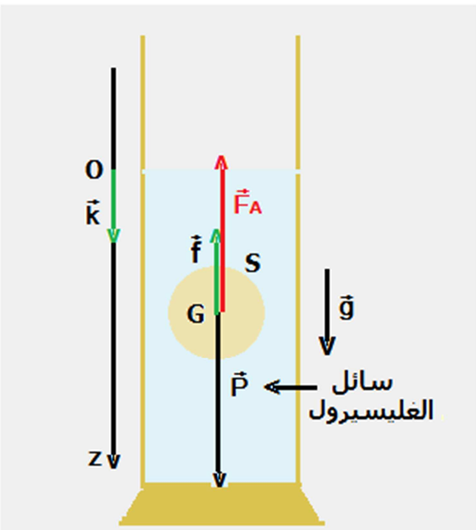
## 2 ـ الدراسة النظرية

**أ ـ أذكر مرجعا يمكن اعتماده في دراسة حركة G مركز قصور الكرية .**

مرجعا مرتبط بالمختبر والذي يعتبر كمرجع غاليلي .

**<u>ب ـ المعادلة التفاضلية للحركة</u>**

**أثناء سقوط الكرية ، ما هي القوى المطبقة عليها . حدد مميزات كل القوى المطبقة على الكرية . حدد من بين القوى الثلاث ، القوة التي تتغير شدتها خلال النظام البدئي .**




دراسة حركة كرية كتلتها $m_b$ و حجمها V وكتلتها الحجمية $\rho_{bille}$ في مائع كتلته الحجمية $\rho_{fluide}$ في حالة سكون بالنسبة للجسم المرجعي الأرضي .

بما أن حركة الكرية رأسية ومنحاه نحو الأسفل ، نختار كمعلم متعامد و ممنظم موجه نحو الأسفل $(O, \vec{k})$ .

ـ المجموعة المدروسة : الكرية

ـ جرد القوى الخارجية المطبقة على الكرية خلال سقوطها :

$\vec{P}$ : وزن الكرية ، $\vec{P} = m.\vec{g}$

$\vec{F}_A$ : دافعة أرخميدس : $\vec{F}_A = -m_f.\vec{g} = -\rho_f.V.\vec{g}$

$\vec{f}$ : قوة الاحتكاك المائع : $\vec{f} = -k.v^n.\vec{k}$

القوة التي تتغير شدتها خلال النظام البدئي هي قوة الاحتكاك المائع

**ج ـ أكتب العلاقة التي تربط بين مجموع القوى الخارجية المطبقة على الكرية و $m_b$ كتلة الكرية ومتجهة التسارع لمركز قصور الجسم $\vec{a}_G$ .**

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الكرية في مرجع مرتبط بالمختبر وهو مرجعا غاليليا تكون لدينا العلاقة المتجهية التالية :

$$\vec{f} + \vec{F}_A + \vec{P} = m_b.\vec{a}$$

**د ـ بإسقاط هذه العلاقة على المحور $(O,\vec{k})$ الرأسي الموجه نحو الأسفل ، أثبت العلاقة التالية :**

$$(1)\ \frac{dv}{dt}=A-Bv^n$$

**عبر عن A و B بدلالة $m_b$ و k و $F_A$ و g شدة الثقالة .**

نسقط العلاقة المتجهية على المحور $(O,\vec{k})$ ، نحصل على المتساوية التالية :

$$m_{bille}g-m_f g-kv^n=m_{bille}.a$$

$$(m_b-m_f)g-kv^n=m_b.\frac{dv}{dt}$$

$$A=\frac{(m_b-m_f)}{m_b}g \qquad B=\frac{k}{m_b}$$

$$\frac{dv}{dt}=A-Bv^n \qquad (4)$$

تمثل هده المعادلة ، المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الكرية خلال السقوط الرأسي في السائل

## 2 ـ تحديد المقادير المميزة للحركة

**ه ـ السرعة الحدية للكرية : بين أن سرعة G تبلغ قيمة حدية $v_\ell$ ، واعط تعبير $v_\ell$ بدلالة A و B و n .**

تبين التجربة أن متجهة السرعة للكرية تتناهى إلى قيمة حدية ، تسمى بالسرعة الحدية للكرية $v_\ell$

بحيث تصبح حركة الكرية حركة مستقيمية منتظمة أي أن : $\frac{dv}{dt}=0$

في المعادلة التفاضلية للحركة نستنتج :

$$A-Bv_\ell^n=0\Rightarrow v_\ell=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$v_\ell=\left(\frac{g}{k}(m_b-m_f)\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (5)$$

ـ عندما تقارب سرعة الكرية السرعة الحدية $v_\ell$ تخضع حركة G إلى نظام يسمى **النظام الدائم** ويتميز بثبات السرعة .

## 3 ـ النظام البدئي

**و ـ أحسب قيمة التسارع البدئي $a_0$ عند اللحظة t=0 .**

قبل تحرير الكرية فهي تخضع إلى قوى مجموعها منعدم .

في اللحظة $t_0=0$ نحرر الكرية ، فيصبح مجموع القوى المطبقة عليها غير منعدم ، فتبدأ حركة السقوط الرأسي للكرية وتتزايد سرعة مركز قصورها : تسمى هذه المرحلة **بالنظام البدئي** بعد ذلك تتطور حركة G نحو نظام دائم يصبح فيه مجموع القوى المطبقة على الكرية مرة أخرى منعدم : $\sum\vec{F}_{ext}=\vec{0}$ أي أن a=0 .

في المعادلة التفاضلية ، عند اللحظة $t_0=0$ لدينا $a_G(t_0=0)=a_O=\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0=0}$ بحيث أن $a_0$ هو التسارع البدئي لمركز القصور G للكرية . لدينا كذلك $\vec{f}=\vec{0}$

$$(m_b-m_f)g=m_b.a_0\Rightarrow \boxed{a_0=\frac{(m_b-m_f)g}{m_b}=\left(1-\frac{m_f}{m_b}\right)g} \qquad (6)$$

مبيانيا ، تساوي قيمة التسارع البدئي قيمة المعامل الموجه للمماس للمنحنى v=f(t) عند اللحظة $t_0=0$ .

$$a_0=\frac{v_\ell}{\tau}=6{,}12m/s^2$$

**و ـ أثبت أن العلاقة (1) تكتب على النحو التالي :** $\textbf{(2)}\ \frac{dv}{dt}=A\left(1-\left(\frac{v}{v_\ell}\right)^n\right)$

$$a = A - Bv^n \Rightarrow 0 = A - Bv_\ell^n$$

$$v_\ell^n = \frac{A}{B}$$

$$\frac{dv}{dt} = A\left(1 - \frac{B}{A}v^n\right)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{v_\ell^n} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = A\left(1 - \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^n\right)} \quad (7)$$

ويمكن كذلك أن نبين أنه في اللحظة t=0 $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = a_0 = A$ لكون أن v=0

**4 ـ الزمن المميز للحركة**

يتقاطع الخط المماس للمنحنى v=f(t) مع الخط المقارب للمنحنى في نقطة أفصولها $\tau$ نسميه **الزمن المميز للحركة**

تحدد قيمة $\tau$ بالعلاقة : (8) $\boxed{v_\ell = a_0\tau}$

**ملحوظة** : تمكن قيمة $\tau$ من إعطاء رتبة قدر مدة النظام البدئي .

**5 ـ حل المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق طريقة أولير Euler**

**أ ـ مبدأ الطريقة**

ـ تمكن طريقة أولير من التوصل لحل تقريبي للمعادلة التفاضلية للحركة بتعويض v(t) بدالة تقاربها محليا بحيث نعلم أن

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow a(t) = \left(\frac{dv}{dt}\right) \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$\boxed{v(t+\Delta t) = v(t) + a(t).\Delta t \quad (9)}$$

تتضمن هذه الطريقة مرحلتين من الحساب التي يجب إنجازها بصفة تكرارية لهذا نم وصفها بطريقة رقمية تكرارية .

**كما أن استعمال هذه الطريقة يستوجب معرفة سرعة مركز القصور في لحظة t والتي ما تكون في غالب الأحيان هي السرعة البدئية $v_0$ في اللحظة t=0 .**

**المرحلة الأولى :**

من خلال العلاقة (1) والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي : $v(t_{i+1}) = v(t_i) + a(t_i).\Delta t \equiv v_{i+1} = v_i + a_i \times \Delta t$ بحيث أن

$$a_i = A - B.v_i^n$$

عند اللحظة t=0 لدينا $a_0 = A - Bv_0^n$

**في المرحلة الثانية :**

نحسب $v_1 = v_0 + a_0 v_0^n \Delta t$

$\Delta t$ تسمى خطوة الحساب

ونعيد حساب التسارع والسرعة المواليين بنفس الطريقة

| التسارع | السرعة | اللحظة |
|---|---|---|
| $a_0 = A - B \times v_0^n$ | $v_0$ | $t_0 = 0$ |
| $a_1 = A - B \times v_1^n$ | $v_1 = v_0 + a_0 \times \Delta t$ | $t_1 = t_0 + \Delta t$ |
| $a_2 = A - B \times v_2^n$ | $v_2 = v_1 + a_0 \times \Delta t$ | $t_2 = t_1 + \Delta t$ |

ثم نبحث عن قيم n و A و B التي تمكن من تطابق القيم النظرية المحصلة باستعمال طريقة أولير مع القيم التجريبية أي تطابق المنحنيين .

**استعمال طريقة أولير بواسطة البرنم Regressi :**

ـ ننقر على أيقونة Euler

**حساب k :**

حساب السرعة الحدية :

من خلال الشكل يتبين أن السرعة الحدية $v_\ell = 1,23m/s$

في المعادلة التفاضلية :

$$a = A - Bv^n \Rightarrow 0 = A - Bv_\ell^n$$
$$v_\ell^n = \frac{A}{B}$$

لدينا $B = \frac{k}{m}$ وبتعويض B في التعبير (1) نحصل على

$$B = \frac{A}{v_\ell^n} \Rightarrow \frac{k}{m_b} = \frac{A}{v_\ell^n}$$
$$k = m_b.\frac{A}{v_\ell^n}$$

**لنحسب A :**

حساب كتلة السائل المزاح :

بما أن الكرية مغمورة كليا في الماء فإن الحجم المزاح للسائل هو حجم الكرية : $\rho_f = \frac{m_f}{V_{bille}} \Rightarrow m_f = \rho_f V_{bille}$

$$V_{bille} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 0{,}860cm^3$$

وبالتالي فإن : $m_f = \rho_f V_{bille} = 1{,}07 \times 0{,}860 = 0{,}92g$

لدينا كذلك كتلة الكرية : $m_b = 6{,}88g$

$$A = 9{,}81\left(\frac{m_b - m_f}{m_8}\right) = 8{,}49m/s^2$$

مبدأ المعالجة الرقمية بواسطة راسم المنحنيات Regressi :

نقوم بحساب السرعة v خلال مدد زمنية متتالية تساوي $\Delta t$ تسمى خطوة الحساب نختار $\Delta t = 0{,}04s$

بمعرفة السرعة $v_i$ في اللحظة $t_i$ ، تكون المعادلة التفاضلية على الشكل التالي : $\left(\frac{dv}{dt}\right)[i] = A - Bv^n[i]$

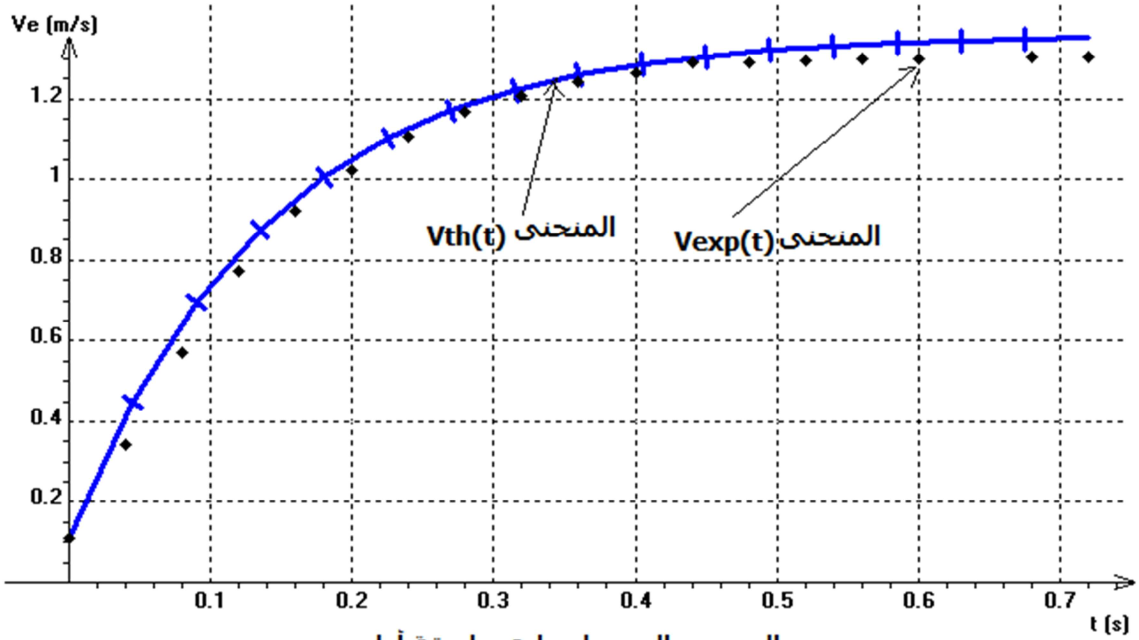
نعلم أن التسارع في اللحظة $t_i$ بطريقة تقريبية هو :

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)[i] = \frac{v[i+1] - v[i]}{\Delta t} \Rightarrow v[i+1] = v[i] + \left(\frac{dv}{dt}\right)[i].\Delta t$$
$$v[i+1] = v[i] + \left(A - Bv^n[i]\right).\Delta t$$
$$v[i+1] = v[i] + A\left(1 - \frac{B}{A}v^n[i]\right).\Delta t$$
$$\frac{A}{B} = \frac{1}{v_\ell^n} \Rightarrow v[i+1] = v[i] + A\left(1 - \frac{v^n[i]}{v_\ell^n}\right).\Delta t$$
$$v[i+1] = v[i] + A\left(1 - \left(\frac{v[i]}{v_\ell}\right)^n\right).\Delta t$$
$$v[i] = v[i-1] + A\left(1 - \left(\frac{v[i-1]}{v_\ell}\right)^n\right)$$

ندخل المعطيات في البرنم الراسم للمنحنيات فنحصل على المنحنى بالأزرق الموافق لطريقة أولير حيث $A=8{,}37m/s^2$ و n=1.

**نحسب k :** $k = m_b.\frac{A}{v_\ell} = 0{,}0436SI$

**ونحسب B :** $B = \frac{k}{m_b} = 6{,}34s^{-1}$



المنحنى المحصل عليه بطريقة أولير

## تمارين حول السقوط الرأسي لجسم صلب

### التمرين 1 : حساب دافعة أرخميدس

لدينا كرية (S) حجمها $V=4,4\times10^{-6}m^3$ وكتلتها $m=34g$ . نأخذ شدة مجال الثقالة $g=10N/kg$

1 ــ أحسب P وزن الكرية

2 ــ توجد الكرية في الهواء حيث كتلته الحجمية $\rho_{air}=1,3kg/m^3$

2 ــ 1 أحسب $F_A$ شدة دافعة أرخميدس المطبقة على الكرية

2 ــ 2 قارن وزن الكرية وشدة دافعة أرخميدس ( $P/F_A$ )

3 ــ نجعل الكرية تسقط في سائل حيث كتلته الحجمية $\rho_{lig}=0,89kg/m^3$

3 ــ 1 أحسب $F'_A$ شدة دافعة أرخميدس المطبقة على الكرية

3 ــ 2 قارن وزن الكرية وشدة دافعة أرخميدس ( $P/F'_A$ )

### التمرين 2 سقوط قطرة ماء في الهواء

خلال السقوط الرأسي لقطرة ماء حجمها V في الهواء ، يطبق عليها هذا الأخير ، بالإضافة إلى القوى الأخرى ، قوى احتكاك تتناسب اطرادا ومتجهة السرعة $\vec{v}$ : $\vec{f}=-k\times\vec{v}$ . k معامل الاحتكاك المائع

نعتبر $\rho_e$ الكتلة الحجمية للماء و $\rho_a$ الكتلة الحجمية للهواء .

1 ــ ما هي وحدة k في النظام العالمي للوحدات ؟

2 ــ اجرد القوى المطبقة على القطرة

3 ــ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أكتب التعبير المتجهي لمجموع القوى المطبقة على القطرة وعلاقته مع متجهة التسارع $\vec{a}_G$ .

4 ــ أثبت المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v إحداثية السرعة على المحور Oz الموجه نحو الأسفل .

5 ــ بين أن القطرة تأخذ سرعة حدية $v_\ell$ خلال السقوط . عبر عن هده السرعة بدلالة المعطيات .

6 ــ أحسب قيمتها

نعطي : $V=4,2\times10^{-15}m^3$ ؛ $\rho_e=1,3g/L$ ؛ $k=3,4\times10^{-9}kg/s$ ؛ $g=9,8m/s^2$

### التمرين 3 : سقوط كرية من البلاستيك في الزيت

نطلق رأسيا في مخبار مملوء بالزيت انطلاقا من سطحه الحر كرية من البلاستيك ، قطرها $d=1cm$ و كتلتها $m=0,52g$ .

1 ــ أ ــ بين أن الكرية ستغمر كليا في الزيت حيث الكتلة الحجمية لهذا الأخير $\rho_h=900kg/m^3$ .

نعطي تعبير حجم كرية شعاعها r : $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

ب ــ أجرد القوى المطبقة على الكرية خلال سقوطها وحددا مميزاتها .

2 ــ تعبير قوة الاحتكاك المائع المطبقة على الكرية خلال سقوطها الرأسي في الزيت هو : $f=k\times v$ بحيث أن v السرعة اللحظية و k معامل تعبيره $k=3\pi\times\eta\times d$ ، حيث $\eta=80\times10^{-3}Pa.s$ ويمثل لزوجة الزيت .

2 ــ 1 أثبت أن تعبير المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v خلال حركة الكرية يكتب على الشكل التالي :

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}\times v=g\left(1-\frac{\rho_h}{\rho_p}\right)$$

2 ــ 2 كيف تعلل أن الكرية تأخذ قيمة حدية خلال سقوطها في الزيت ؟

2 ــ 3 بين أن حل المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل التالي : $v=A\left(1-e^{-Bt}\right)$ تحددا الثابتتين A و B

3 ــ بعد 40ms تبقى قيمة سرعة الكرية $v_\ell=30mm/s$

3 ــ 1 أجرد القوى المطبقة على الكرية في هذه الحالة

3 ــ 2 ما هي رتبة القدر للزمن المميز لهذه الحركة ؟

### التمرين 4 استعمال طريقة أولير

نطلق كرية حجمها V وكتلتها الحجمية ρ بدون سرعة بدئية في مائع كتلته الحجمية ρ′ ( $\rho'<\rho$ )

تعبير متجهة قوة الاحتكاك المائع $f=k\times v^2$ ، بحيث أن v سرعة الكرية في المائع خلال حركتها الرأسية في المائع نوجه المحور الرأسي Oz موجه نحو الأسفل .

1 ــ حدد منحى حركة الكرية

2 ــ بين أن المعادلة التفاضلية لحركة الكرية تكتب على الشكل التالي :

$$\frac{dv}{dt} = \alpha \times v^2 + \beta$$

3 ـ لحل هذه المعادلة يمكن استعمال طريقة أولير ، ذكر بمبدأ هذه العملية

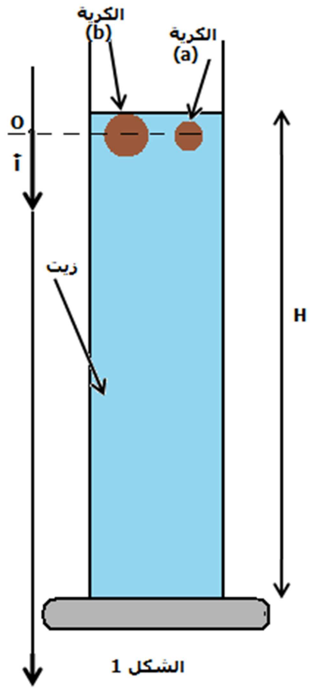
4 ـ خلال حصة تجريبية ـ توصل التلاميذ إلى النتائج التالية : $\alpha = -3,00 m^{-1}$ و $\beta = 10,0 m/s^2$ والجدول أسفله

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t(s)$ | 0 | 0,040 | 0,080 | 0,120 | 0,160 | 0,200 | 0,240 |
| $v(m/s)$ | 0,000 | 0,400 | 0,781 | | 1,360 | 1,538 | 1,654 |
| $a(m/s^2)$ | 10 | | | 6,319 | 4,448 | 2,901 | 1,789 |

4 ـ 1 أتمم الجدول أعلاه

4 ـ 2 ما قيمة السرعة الحدية ؟

**التمرين 5 : السقوط الرأسي لجسم صلب (Bac 2010)**




يخضع كل جسم صلب مغموء في مائع إلى دافعة أرخميدس ، وإذا كان هذا الجسم في حركة إزاحة داخل المائع فإنه يخضع كذلك إلى قوة احتكاك مائع .

يهدف هذا التمرين إلى دراسة تطور سرعة كرتين (a) و (b) من الزجاج متجانستين ليس لهما نفس الشعاع ، توجدان في حركو إزاحة داخل زيت بسرعة نسبيا صغيرة .

معطيات :

الكتلة الحجمية للزجاج : $\rho = 2600 kg/m^3$ ؛

الكتلة الحجمية للزيت : $\rho_0 = 970 kg/m^3$

لزوجة الزيت : $\eta = 8,00 \times 10^{-2} N.m^{-2}.s$ ؛

تسارع الثقالة : $g = 9,81 m/s^2$ ؛

تعبير حجم كرية شعاعها r : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

نحرر ، عند اللحظة $t = 0$ ، الكريتين (a) و (b) عند سطح الزيت الموجود في أنبوب شفاف أسطواني رأسي .

ارتفاع الزيت في الأنبوب هو $H = 1,00m$ . الشكل (1)

1 ـ دراسة حركة الكرية (a) .

ندرس حركة الكرية في معلم $(O, \vec{i})$ المرتبط بالأرض . تخضع الكرية أثناء حركتها داخل الزيت إلى :

ـ دافعة أرخميدس $\vec{F} = -\rho_0 .V.g.\vec{i}$

ـ قوة الاحتكاك المائع $\vec{f} = -6\pi.\eta.r.v.\vec{i}$ حيث v سرعة الكرية ؛

ـ وزنها $\vec{P} = m\vec{g}$ .

نرمز للزمن المميز لحركة الكرية (a) ب $\tau$ ؛ ونعتبر أن سرعة الكرية تبلغ القيمة الحدية $v_\ell$ بعد تمام المدة الزمنية $5\tau$ .

1 ـ 1 أثبت المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ لحركة الكرية (a) مع تحديد تعبير الثابتتين $\tau$ و C . احسب $\tau$ علما أن $r = 0,25cm$ .

1 ـ 2 احسب قيمة السرعة الحدية $v_\ell$ للكرية (a) .

2 ـ دراسة مقارنة لحركتي الكريتين (a) و (b)

شعاع الكرية (b) هو $r' = 2r$

2 ـ 1 حدد ، معللا جوابك ، الكرية التي ستستغرق أطول مدة زمنية لتبلغ سرعتها الحدية .

2 ـ 2 خلال النظام الانتقالي تقطع :

ـ الكرية (a) المسافة $d_1 = 5,00cm$ ؛

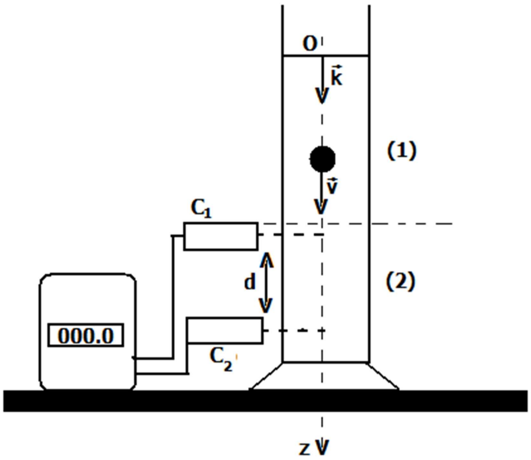
ـ الكرية (b) المسافة $d_2 = 80cm$ .

نهمل شعاعي الكرتين r و r' أمام ارتفاع الزيت H .

احسب المدة الزمنية الفاصلة بين وصول الكريتين (a) و (b) إلى قعر الأنبوب .

**التمرين 6 ( Bac 2008 )**

يهدف هذا التمرين إلى نمذجة قوة الاحتكاك المائع المطبقة من طرف الغليسيرول على جسم صلب وذلك بدراسة حركة السقوط الرأسي لكلة فلزية كتلتها m وشعاعها r داخل الغليسيرول .




معطيات :

ـ شعاع الكلة : $r = 1cm$ ؛ حجم الكلة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

ـ الكتلة الحجمية :

للفلز الذي تتكون منه الكلة : $\rho_1 = 2,7.10^3 kg/m^3$

الغليسيرول : $\rho_2 = 1,26.10^3 kg/m^3$

ـ تسارع الثقالة : $g = 9,81 m/s^2$

نذكر أن شدة دافعة أرخميدس المطبقة على الكلة المغمورة كليا في الغليسيرول هي : $F = \rho_2 V g$ .

ننمذج قوة الاحتكاك التي تخضع لها الكلة أثناء السقوط داخل الغليسيرول ب $\vec{f} = -9\pi r v^n \vec{k}$ حيث n عدد صحيح و v سرعة مركز قصور الكلة .

عند لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ $(t_0 = 0)$ ، نحرر الكلة بدون سرعة بدئية من نقطة O أصل المحور الرأسي $(O, \vec{k})$ الموجه نحو الأسفل ، فتتم حركتها داخل الغليسيرول الموجود في إناء زجاجي ، على مرحلتين :

(1) : مرحلة النظام البدئي بين لحظتين $t_0$ و $t_1$ حيث تتزايد سرعة الكلة .

(2) : مرحلة النظام الدائم انطلاقا من اللحظة $t_1$ حيث تأخذ سرعة الكلة قيمة حدية ثابتة $v_\ell$ .

يمكن الجهاز المكون من ميقت وخليتين $(C_1)$ و $(C_2)$ من قياس المدة الزمنية $\Delta t$ التي تستغرقها الكلة لقطع المسافة $d = 20cm$ خلال المرحلة (2) أنظر الشكل جانبه

1 ـ حدد قيمة السرعة الحدية $v_\ell$ علما أن $\Delta t = 956ms$ .

2 ـ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v لمركز قصور الكلة داخل السائل تكتب على الشكل :

$$\frac{dv}{dt} + Av^n = B \quad \text{مع} \quad A = \frac{27}{4\rho_1 r^2} \quad \text{و} \quad B = g\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\right)$$

3 ـ أوجد انطلاقا من المعادلة التفاضلية ، تعبير $v_\ell^n$ بدلالة $g, r, \rho_1, \rho_2$ .

4 ـ استنتج العدد n .

## VI ــ السقوط الرأسي الحر .

### 1 ــ تعريف

السقوط الحر لجسم صلب هو حركة مركز القصور هذا الجسم في مرجع أرضي عندما يخضع الجسم لقوة الثقالة فقط .
نظريا يكون السقوط حرا إذا تم قي الفراغ ، ويمكن اعتبار سقوط جسم في الهواء حرا إذا كانت كثافته عالية وشكله انسيابي ، ومنطقة سقوطه محدودة في مجال الثقالة .

2 ــ متجهة التسارع $a_G$ لمركز القصور .

نعتبر السقوط الحر لجسم صلب في مجال الثقالة وفي مرجع أرضي . أي أن الجسم يوجد تأثير وزنه فقط .
نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} = m.\vec{g} = m\vec{a}_G$ أي أن $\vec{g} = \vec{a}_G$

3 ــ المعادلة الزمنية للحركة

في المعلم $(O,\vec{k})$ الموجه نحو الأسفل نسقط العلاقة فنحصل على : $a_z = g \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = g \Rightarrow v_z = gt + C$ نحدد الثابتة C بالشروط البدئية . نأخذ عند اللحظة $t_0=0$ أن $v_G(t=0) = v_0 = 0$ أي أن $v_z = gt$ ونستنتج أن سرعة G دالة زمنية خطية .
بنفس الطريقة نبحث عن z(t) :
$v_z = \frac{dz}{dt} = gt \Rightarrow z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C'$ ، نحدد كذلك الثابتة C′ بالشروط البدئية . نأخذ عند اللحظة t=0 أن $z(0)=z_0=0$ وبالتالي فإن C′=0 أي أن المعادلة الزمنية لحركة السقوط الحر للجسم الصلب بدون سرعة بدئية ومن النقطة O تم اختيارها كأصل معلم الزمن هي : $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$ .
وهذه المعادلة نعممها بالنسبة لجميع الأجسام الصلبة التي تطلق بدون سرعة بدئية في سقوط حر أي أنها تسقط بنفس الحركة ، **حركة مستقيمية متغيرة بانتظام** .

### التمرين 1 :

I ــ تسقط كرة رأسيا بدون سرعة بدئية . نعتبر السقوط حرا ونقوم بدراسته في معلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محوره $(O,\vec{k})$ رأسي وموجه نحو الأسفل .

1 ــ ما طبيعة مسار G مركز قصور الكرة ؟
2 ــ أجرد القوى المطبقة على الكرة أثناء سقوطها . ما القوى التي نهملها أمام وزن الجسم ؟ وما هي الشروط لكي نقوم بهذا الإهمال ؟
3 ــ عبر بدلالة الزمن t عن الأنسوب z للنقطة G .
4 ــ أحسب السرعة التي ستصل بها الكرة إلى الأرض . نعطي h=2m .

II ــ السرعة البدئية في اللحظة t=0 لمركز قصور الكرة أرسلت رأسيا نحو الأعلى تساوي $v_0$=15,0m/s

1 ــ اعط تعبير الإحداثية v لمتجهة السرعة لمركز القصور الكرة لمحور رأسي $(O,\vec{k})$ موجه نحو الأعلى للمعلم المتعامد والممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
2 ــ أوجد تعبير $t_M$ تاريخ اللحظة الموافقة للارتفاع الأقصى $z_M$ للنقطة G ، واحسب قيمته .
3 ــ أحسب قيمة $z_M$ .

### التمرين 2 : تحديد عمق بئر

لتحديد العمق $H$ لبئر ، نسقط رأسيا حجرة من فتحة البئر بدون سرعة بدئية . المدة الزمنية المستغرقة بين لحظة انطلاق سقوط الحجرة و اللحظة التي سمع فيها اصطدام الحجرة بالقعر البئر هي $\Delta t = 4,50s$
نعطي سرعة الصوت في الهواء $V_{son} = 330m/s$ و $g = 9,80m/s^2$
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين أن تعبير العمق $H$ يكتب على الشكل التالي :

$$H = \frac{V_{son}^2}{g}\left(1 + \frac{g\Delta t}{V_{son}} - \sqrt{1 + \frac{2g\Delta t}{V_{son}}}\right)$$

أحسب العمق $H$ للبئر .