Chapitre 5

Corrigé des exercices

Exercice 1 On obtient sans peine les tables de vérité suivantes :

a	b	$a \mid b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a	$a \mid a$
0	1
1	0

De ceci on déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\neg a &\equiv a \mid a \\
a \wedge b &\equiv \neg(a \mid b) \equiv (a \mid b) \mid (a \mid b) \\
a \vee b &\equiv \neg a \mid \neg b \equiv (a \mid a) \mid (b \mid b) \\
a \Rightarrow b &\equiv a \mid \neg b \equiv a \mid (b \mid b) \\
a \Leftrightarrow b &\equiv (a \mid b) \mid (\neg a \mid \neg b) \equiv (a \mid b) \mid \big((a \mid a) \,\big|\, (b \mid b)\big)
\end{aligned}$$

Pour montrer que l'opérateur NOR, que l'on note parfois $\otimes$, est lui aussi un système complet, il suffit de montrer qu'on peut exprimer le connecteur de Sheffer à l'aide du seul $\otimes$.

a	b	$a \otimes b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

a	$a \otimes a$
0	1
1	0

Il est facile de constater que $a \mid b \equiv \neg(a \otimes b)$, donc $a \mid b \equiv (a \otimes b) \otimes (a \otimes b)$. Le NOR forme donc lui aussi un système complet.

Exercice 2 Utilisons l'algèbre de Boole pour simplifier l'expression :

$$\overline{ab}(a+\overline{b})(a+b) \equiv (\overline{a}+\overline{b})(a+\overline{b})(a+b) \equiv (\overline{a}\overline{b}+a\overline{b}+\overline{b})(a+b) \equiv (\overline{b}+\overline{b})(a+b) \equiv \overline{b}(a+b) \equiv a\overline{b}$$

donc l'expression proposée est équivalente à $a \wedge \neg b$.

Exercice 3 On calcule :

$$\begin{aligned}
&ab+c+\overline{b}\overline{c}+\overline{a}\,\overline{c} \equiv ab+c+(\overline{a}+\overline{b})\overline{c} \equiv ab+c+\overline{ab}\overline{c} \equiv ab+c+\overline{ab+c} \equiv 1 \\
&a+\overline{b}\overline{c}+\overline{a}c+b\overline{c} \equiv a+(b+\overline{b})\overline{c}+\overline{a}c \equiv a+\overline{c}+\overline{a}c \equiv a+\overline{c}+\overline{a+\overline{c}} \equiv 1
\end{aligned}$$

donc les deux expressions proposées sont bien des tautologies.

Exercice 4 Dressons la table de vérité de la formule logique $\mathrm{F} = (\neg a \vee b) \wedge c \iff a \oplus c$:

a	b	c	$\neg a \vee b$	$(\neg a \vee b) \wedge c$	$a \oplus c$	F
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0

Sous forme normale disjonctive, nous avons $\mathrm{F} \equiv \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}bc + a\overline{b}c$.
De même, $\overline{\mathrm{F}} \equiv a\overline{b}\overline{c} + ab\overline{c} + abc$, donc sous forme normale conjonctive on a $\mathrm{F} \equiv (\overline{a} + b + c)(\overline{a} + \overline{b} + c)(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$.
Formons maintenant le tableau de Karnaugh de F :

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0

On en déduit que $\mathrm{F} \equiv \overline{a} + \overline{b}c$. Si on préfère une conjonction, on a $\overline{\mathrm{F}} \equiv ab + a\overline{c}$, donc $\mathrm{F} \equiv (\overline{a} + \overline{b})(\overline{a} + c)$.

Exercice 5 Les tableaux de Karnaugh des formules F et G sont les suivants :

F: ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

G: ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

Nous avons donc $\mathrm{F} \equiv \overline{a}\overline{b} + c\overline{d} + \overline{a}d + bc$ et $\mathrm{G} \equiv \overline{a} + \overline{b}c$.

Exercice 6

a) Posons $\mathrm{F} = ab + acd + bde$; alors le coffre peut être ouvert si et seulement si $\mathrm{F} \equiv 1$.

b) Le tableau de Karnaugh associé à F est le suivant :

ab \ cde	000	001	011	010	110	111	101	100
10	0	0	0	0	1	1	0	0
00	0	0	0	0	0	0	0	0
01	0	0	1	0	0	1	0	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1

On observe que $\overline{\mathrm{F}} \equiv \overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c} + \overline{b}\,\overline{d} + \overline{a}\overline{d} + \overline{a}\,\overline{e}$, donc $\mathrm{F} \equiv (a + b)(b + c)(b + d)(a + d)(a + e)$.

c) Ceci montre qu'il suffit de poser 5 serrures sur le coffre, et de fournir une clé de la première serrure à A et B, une clé de la deuxième serrure à B et C, une clé de la troisième serrure à B et D, une clé de la quatrième serrure à A et D, et enfin une clé de la cinquième serrure à A et E (soit 10 clés en tout).

Exercice 7 La loi $\oplus$ étant associative dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, nous avons :

$$a \oplus (a \oplus b) \equiv (a \oplus a) \oplus b \equiv 0 \oplus b \equiv b \qquad \text{et} \qquad \big(a \oplus (a \oplus b)\big) \oplus (a \oplus b) \equiv b \oplus (a \oplus b) \equiv a.$$

Considérons alors la séquence d'instructions suivante :

$$v \leftarrow u \oplus v, \qquad u \leftarrow u \oplus v, \qquad v \leftarrow u \oplus v.$$

Si au départ u contient l'entier a et v l'entier b, alors :

- après la première instruction u contient a et v contient $a \oplus b$;
- après la deuxième instruction u contient $a \oplus (a \oplus b) = b$ et v contient $a \oplus b$;
- après la troisième instruction u contient b et v contient $b \oplus (a \oplus b) = a$.

Les deux références ont vu leur contenus échangés.

Exercice 8 Seule la première de ces assertions est une tautologie, ce qu'on peut prouver automatiquement :

```
# let f = analyseur "((a => b) => a) => a" in est_une_tautologie f ;;
- : bool = true

# let f = analyseur "((a => b) => a) => b" in satisfiabilite f ;;
a = faux   b = faux
a = faux   b = vrai
a = vrai   b = vrai
- : unit = ()
```

L'assertion « $((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a$ est une tautologie » s'appelle la loi de Peirce ; en revanche la formule $((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow b$ n'est pas une tautologie puisqu'elle n'est pas vérifiée pour la distribution de vérité $a =$ vrai et $b =$ faux.

Exercice 9 Notons a la proposition « j'aime Marie » et b la proposition « j'aime Anne ».
Les deux réponses du logicien peuvent se résumer par la formule F suivante : $\big((a \Rightarrow b) \Rightarrow a\big) \wedge \big(a \Rightarrow (a \Rightarrow b)\big)$.
Formons la table de vérité de cette formule :

a	b	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \Rightarrow a$	$a \Rightarrow (a \Rightarrow b)$	F
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

On en déduit que le logicien aime à la fois Anne et Marie.
Nous aurions aussi pu utiliser la fonction que nous avons définie en Caml :

```
# let F = analyseur "((a => b) => a) et (a => (a => b))"
  in satisfiabilite F ;;
a = vrai   b = vrai
- : unit = ()
```

Exercice 10 Définissons les assertions suivantes :

a : « x est écossais » ;

b : « x porte des chaussures oranges » ;

c : « x porte une jupe » ;

d : « x est marié » ;

e : « x sort le dimanche ».

Le règlement du club indique que si x est un membre du club, alors la formule

$$\mathrm{F} = (\neg a \Rightarrow b) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (d \Rightarrow \neg e) \wedge (e \Leftrightarrow a) \wedge (c \Rightarrow a \wedge d) \wedge (a \Rightarrow c)$$

est satisfaite. Cherchons donc si cette formule peut être satisfaite :

```
# let F = analyseur "(non a => b) et (c ou non b) et (d => non e)
                     et (e <=> a) et (c => (a et d)) et (a => c)" ;;
F : formule = ...
# satisfiabilite F ;;
- : unit = ()
```

Il semble que F ne soit pas satisfiable, autrement dit que ¬F soit une tautologie. Vérifions-le :

```
# est_une_tautologie (Op_unaire (neg, F)) ;;
- : bool = true
```

Aucun membre du club ne peut répondre aux exigences de ce règlement !