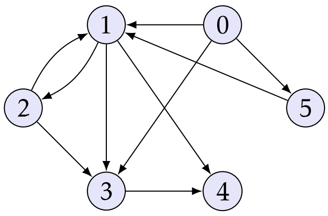
Travaux pratiques

Chemins dans un graphe

On considère un graphe orienté $G = (V, E)$ dont les sommets sont $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et les arêtes E décrites par la donnée de la matrice d'adjacence $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ avec $(i,j) \in E \iff a_{ij} = 1$ (on conviendra que les indices des lignes et des colonnes de A sont compris entre 0 et $n-1$).



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figure 1 – *Un graphe orienté, sa matrice d'adjacence et la matrice des sommets accessibles.*

On définit sur $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$ deux opérations $\oplus$ et $\otimes$ de la façon suivante :

– $C = A \oplus B$ est défini par les relations $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{ij} = b_{ij} = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

– $D = A \otimes B$ est défini par les relations $d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{ik} b_{kj} = 0 \text{ pour tout } k \in [\![0, n-1]\!] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

On définit $A^{\otimes k}$ en posant $A^{\otimes 0} = I_n$ et $A^{\otimes k+1} = A \otimes A^{\otimes k}$ pour $k \geqslant 0$. On note $a_{ij}^{(k)}$ l'élément d'indice (i,j) de $A^{\otimes k}$.

Question 1. Montrer que $(I_n \oplus A)^{\otimes n} = I_n \oplus A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes n}$.

Question 2. On choisit de représenter un élément de $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$ par le type *bool vect vect*. Écrire deux fonctions `somme` et `produit` qui calculent respectivement $A \oplus B$ et $A \otimes B$.

Question 3. On appelle *matrice des sommets accessibles* la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ définie par $c_{ij} = 1$ si et seulement si le sommet j est accessible à partir du sommet i (c'est-à-dire s'il existe un chemin conduisant de i à j). On conviendra qu'un sommet est toujours accessible à partir de lui-même.
Déduire de la question 1. une fonction `accessible` qui calcule la matrice des sommets accessibles d'un graphe. On s'efforcera de minimiser le nombre d'opérations sur les matrices.

Question 4. Définir une fonction `chemins` qui pour un couple de sommets (i,j) affiche tous les chemins allant du sommet i au sommet j. Les chemins affichés ne doivent comporter aucun cycle (on ne peut donc passer qu'une et une seule fois par un sommet).

Exemple :

```
# chemins a 0 4 ;;
0 -> 1 -> 2 -> 3 -> 4
0 -> 1 -> 3 -> 4
0 -> 1 -> 4
0 -> 3 -> 4
0 -> 5 -> 1 -> 2 -> 3 -> 4
0 -> 5 -> 1 -> 3 -> 4
0 -> 5 -> 1 -> 4
- : unit = ()
```