Travaux pratiques

Résolution numérique de l'équation de Poisson

L'équation de Poisson est une équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme $\Delta u = f$ où Δu désigne le laplacien d'une fonction spatiale u que l'on cherche à déterminer et f une fonction donnée. Associée à des conditions aux limites définies sur la frontière du domaine de définition de u, cette équation possède en général une unique solution.

Nous allons illustrer la résolution numérique d'un tel système par la méthode des différences finies à travers l'étude de deux problèmes physiques, d'abord en dimension 1 puis en dimension 2.

1. Déformation d'une barre élastique

En mécanique des structures, l'équation de Poisson en dimension 1 peut modéliser la déformation d'une mince barre élastique fixée sur ses bords et soumise à un effet de chargement $f(x)$.

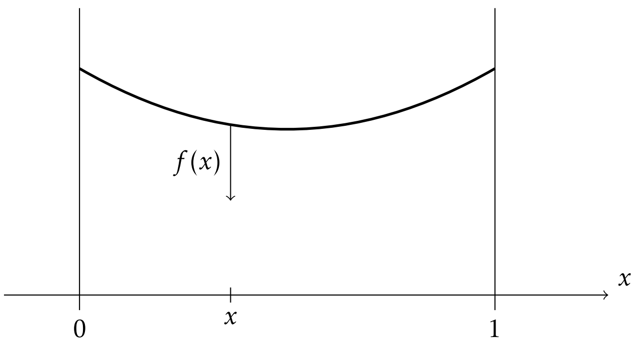

Figure 1 – Déformation d'une barre élastique.

Nous représenterons cette barre élastique par une fonction $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe suffisante et les conditions aux limites par la donnée de deux valeurs $u(0) = u(1) = 0$.

On considère une discrétisation du segment $[0,1]$ en $n+2$ points : autrement dit, on pose $x_i = ih$ pour $i \in [\![0, n+1]\!]$ avec $h = \dfrac{1}{n+1}$.

Question 1.

a) Montrer que si u est de classe $\mathscr{C}^2$ alors pour x fixé dans l'intervalle $]0,1[$ on a :

$$u''(x) = \frac{1}{h^2}\Big(u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)\Big) + \mathrm{o}(1)$$

Cette formule conduit à approcher $u(x_i)$ par le réel u_i, solution du système d'équations :

$$\begin{cases} u_0 = 0 & \\ \dfrac{1}{h^2}\Big(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\Big) = f(x_i) & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n \\ u_{n+1} = 0 & \end{cases}$$

b) Montrer que ce système se ramène à la résolution de l'équation matricielle : $\mathrm{A}u = v$ où $\mathrm{A} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et u le vecteur de coordonnées $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Question 2.

a) En utilisant la bibliothèque `numpy`, en déduire une fonction `poisson1(f, n)` qui prend pour arguments la fonction f et l'entier n et qui renvoie les deux tableaux $x = (x_0, \dots, x_{n+1})$ et $u = (u_0, \dots, u_{n+1})$.

Indication. Pour résoudre un système linéaire vous pourrez utiliser la fonction `solve` du module `numpy.linalg`.

b) Tester votre fonction en visualisant l'action de la gravité sur une barre élastique fixée en ses deux extrémités (prendre $f : x \mapsto 1$), puis, sachant que dans ce cas la résolution exacte de l'équation de Poisson est triviale, superposer sur un même graphe la solution exacte $\tilde{u}$ et la solution approchée u.

c) Calculer pour $n = 100$ l'erreur commise $\|u - \tilde{u}\|_\infty = \max_{0 \leqslant i \leqslant n+1} |u(x_i) - \tilde{u}(x_i)|$.

2. Déformation d'une membrane

On considère désormais une membrane élastique horizontale de forme carrée. On met cette membrane sous tension en tirant sur ses bords puis on exerce sur elle une force transversale. La membrane à l'équilibre épouse une surface d'équation $z = u(x, y)$, où u est la solution de l'équation de Poisson $\Delta u = f$, où u et f sont des fonctions à deux variables définies sur $[0,1] \times [0,1]$, la fonction f modélisant la pression exercée sur la membrane.
On maintient fixe les bords de la membrane, ce qui se traduit par les conditions aux limites :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \qquad u(x,0) = u(1,y) = u(x,1) = u(0,y) = 0.$$

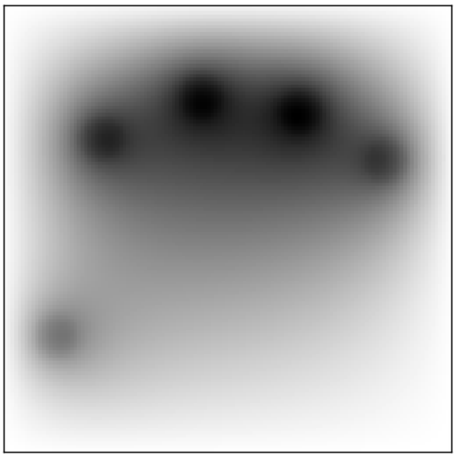

Figure 2 – Déformation d'une membrane sous l'effet de la pression de cinq doigts.

On considère cette fois une discrétisation tant horizontale que verticale en $n+2$ points en posant $x_i = y_i = ih$ pour $i \in [\![0, n+1]\!]$ avec $h = \dfrac{1}{n+1}$. La valeur $u(x_i, y_j)$ sera approchée par un réel que nous noterons $u_{i,j}$ pour $0 \leqslant i, j \leqslant n+1$.

Question 3.

a) À l'aide de la même approximation de la dérivée seconde que celle employée dans la première partie, proposer un système d'équations dont les solutions sont les réels $u_{i,j}$.

b) On définit le vecteur $u \in \mathbb{R}^{n^2}$ de coordonnées $(u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{n,1}, \dots\dots, u_{1,n}, u_{2,n}, \dots, u_{n,n})$. Montrer que ce dernier est solution d'une équation linéaire $\mathrm{A}u = v$ où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ est la matrice définie par des blocs de taille n :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{S} & \mathrm{I} & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} \\ \mathrm{I} & \mathrm{S} & \mathrm{I} & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathrm{O} \\ \vdots & \ddots & \mathrm{I} & \mathrm{S} & \mathrm{I} \\ \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} & \mathrm{I} & \mathrm{S} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{S} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Nous admettrons que ces deux matrices sont inversibles.

Question 4. En déduire une fonction `poisson2(f, n)` qui prend pour arguments la fonction f et l'entier n et qui retourne une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i^e ligne et de la j^e colonne vaut u_{ij}.

Remarque. Il pourra être utile d'utiliser la méthode `reshape` qui, appliquée à une matrice `numpy`, permet de la redimensionner : si `u` est une matrice uni-dimensionnelle de taille n^2, `u.reshape((n, n))` renvoie une matrice de taille $n \times n$ contenant les mêmes valeurs.

Question 5.

a) Tester la fonction précédente en soumettant la membrane à un champ de gravitation uniforme (prendre $f(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in [\![0,1]\!]^2$ et $n = 50$).
Plutôt que de représenter en trois dimensions la surface de la membrane, on préférera utiliser la fonction `matshow` du module MATPLOTLIB.PYPLOT qui, appliquée à une matrice, représente cette dernière en colorant chaque case de la matrice par une couleur dont la teinte dépend de la valeur du coefficient correspondant (la représentation de la figure 2 utilise cette fonction avec une échelle en niveau de gris).

b) On modélise la pression exercée par un doigt sur la membrane en un point de coordonnées (x_0, y_0) par la fonction :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/r^2 & \text{si } \|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2 < r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } r = 0,05$$

Représenter la déformation de la membrane soumise à la pression de cinq doigts, comme illustré figure 2.

3. Méthode de relaxation

La méthode des différences finies que nous venons d'utiliser ramène la résolution de l'équation de Poisson bi-dimensionnelle à la résolution d'un système de Cramer de n^2 équations et autant d'inconnues. La résolution explicite d'un tel système par la méthode du pivot de Gauss a une complexité en $O((n^2)^3) = O(n^6)$, ce qui nous empêche de prendre en compte de grandes valeurs de n (nous nous sommes pour l'instant contenté de $n = 50$). Si l'on veut une résolution plus précise, il est nécessaire d'appliquer une méthode qui va non plus calculer une solution exacte mais plutôt itérer une suite dont la limite est la solution exacte.
Parmi les différentes méthodes qui existent, la méthode dite de *relaxation* s'avère dans le cas présent intéressante car la matrice A est « creuse » (mis à part 5 diagonales, les coefficients sont nuls). Cette méthode consiste à poser :

$$A = M - N \qquad \text{avec} \quad M = \frac{1}{\omega}D + E \quad \text{et} \quad N = \frac{1-\omega}{\omega}D - F$$

où D, E et F sont respectivement les parties diagonale, inférieure et supérieure de A et ω le paramètre de relaxation.

Dans ces conditions, et lorsque $\omega \in]0,2[$ nous admettrons que toute suite définie par la donnée d'une condition initiale $u^{(0)}$ et de la relation de récurrence $Mu^{(k+1)} = Nu^{(k)} + v$ converge vers la solution u du système. De plus, et dans le cas particulier qui nous intéresse nous admettrons que la valeur optimale de la constante de relaxation ω est :

$$\omega = \frac{2}{1+\sin(\pi h)}.$$

Question 6. Pour que cette méthode soit efficace, il ne faut pas manipuler explicitement les matrices A, M et N. Il est donc nécessaire d'exprimer explicitement les coefficients de $u^{(k+1)}$ en fonction de ceux de $u^{(k)}$, de ω et de v à partir de la relation $Mu^{(k+1)} = Nu^{(k)} + v$. Si on note $u^{(k)} = (u_{i,j}^{(k)})_{0 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ cette relation se traduit par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^n, \qquad u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} - \frac{4}{\omega} u_{i,j}^{(k+1)} = -4\Big(\frac{1-\omega}{\omega}\Big) u_{i,j}^{(k)} - u_{i+1,j}^{(k)} - u_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f(x_i, x_j)$$

a) Rédiger une fonction `itere(u, x, f, n, h, omega)` qui prend pour arguments le tableau $u^{(k)}$ ainsi que les paramètres x, f, n, h et ω et qui renvoie le tableau $u^{(k+1)}$.

b) On choisit pour condition d'arrêt la condition $\dfrac{\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_\infty}{\|u^{(k+1)}\|_\infty} < \varepsilon$.

Rédiger une fonction `poisson3(f, n, epsilon)` qui résout l'équation de Poisson par la méthode de relaxation en choisissant la valeur optimale de ω. Vous pourrez éventuellement ajouter un nombre maximal d'itérations au delà duquel le processus échoue.

c) Vérifier votre fonction en représentant de nouveau la déformation de la membrane soumise à la pression de cinq doigts, avec $n = 100$ et $\varepsilon = 0,01$.

Question 7. Dans cette question, on s'intéresse à l'influence du coefficient ω sur la vitesse de convergence. Pour cela, on considère une équation de Poisson dont on connait la solution : $u(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ et on choisit la valeur $n = 100$ pour la discrétisation de l'équation de Poisson.

a) Calculer la fonction $f = \Delta u$, puis représenter sous forme de graphe l'influence du facteur $\omega \in \,]0,2[$ sur le nombre minimal d'itérations nécessaire pour atteindre la condition d'arrêt lorsque $\varepsilon = 0,01$. On fera varier ω entre 0 et 2 avec un pas égal à $0,1$.

b) Tracer enfin dans un même cadre les graphes des différentes fonctions $k \mapsto \|u^{(k)} - u\|_\infty$, $1 \leqslant k \leqslant 100$, obtenus en faisant varier ω entre 1 et 2 avec un pas de $0,2$. Superposer enfin à ces graphes le graphe obtenu en choisissant pour ω sa valeur optimale $\dfrac{2}{1+\sin(\pi h)}$.