

GRUE TELESCOPIQUE DE PRISE DE VUE CINEMA

Partie A. Position du contrepoids et sa mise en mouvement:

1° - Déterminer l'expression de la masse m_6 en fonction des données et faire l'application numérique.

Formule du centre d'inertie : $\sum_{i=1}^6 m_i \overrightarrow{OG_i} = (\sum_{i=1}^6 m_i) \overrightarrow{OG_S}$

$$\Rightarrow m_6 \overrightarrow{OG_6} + m_1 \overrightarrow{OG_1} + m_2 \overrightarrow{OG_2} + m_3 \overrightarrow{OG_3} + m_4 \overrightarrow{OG_4} + m_5 \overrightarrow{OG_5} = m_S \overrightarrow{OG_S}$$

Tous les vecteurs sont portés par \vec{x} ; donc

$$m_6 x_6 + m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5 = (m_6 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) x_S$$

G_1 coïncide avec O donc $x_1=0$.

On veut que G_S coïncide avec O donc $x_S=0$.

$$m_6 x_6 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5 = 0$$

En position sortie du télescope x_6 est connue ($x_6 = -2$ m), donc

$$m_6 = \frac{-(m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5)}{x_6} = \mathbf{922,4 \text{ kg}}$$

2° - En position du télescope rentré, déterminer l'expression de l'inconnue x_6 en fonction des données et faire l'application numérique en prenant $m_6 = 923$ kg.

A partir des mêmes relations de la question 1 on obtient :

$$x_6 = \frac{-(m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5)}{m_6} = \mathbf{-0,334 \text{ m}}$$

3° - Sachant que le câble ne glisse pas sur la poulie (10), déterminer l'expression de la vitesse de translation de (6) par rapport à (T1) en fonction de ω_m et des données, elle sera notée V_6 .

$V_6 = R_{10} \omega_{10}$, avec (puisque (10), (0) et (8) forment la même pièce) : $\frac{\omega_{10}}{\omega_m} = \frac{\omega_9}{\omega_m} = \frac{\omega_8}{\omega_m} = \frac{Z_7}{Z_8}$

Donc

$$V_6 = R_{10} \omega_m \frac{Z_7}{Z_8}$$

4° - Sachant que le câble ne glisse pas sur la poulie (9), déterminer l'expression de la vitesse de translation de (T2) par rapport à (T1) en fonction de ω_m et des données, elle sera notée V_2 .

$$V_2 = R_9 \omega_9$$

Donc

$$V_2 = R_9 \omega_m \frac{Z_7}{Z_8}$$

5° - Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble (E) = (6, T2, T3, T4, 5) par rapport à (T1) en fonction des masses m_i citées dans le tableau ci-dessus (page 3/10) et des vitesses V_i .

$$E_c(E/T_1) = \frac{1}{2} (m_6 V_6^2 + m_2 V_2^2 + m_3 V_3^2 + m_4 V_4^2 + m_5 V_5^2)$$

6° - Donner l'expression de cette énergie cinétique en fonction de ω_m .

On a d'après les questions 3 et 4 :

$$V_6 = R_{10} \omega_m \frac{Z_7}{Z_8}$$

$$V_2 = R_9 \omega_m \frac{Z_7}{Z_8}$$

D'après l'énoncé :

$$V_2 = \frac{1}{3} V_5 \Rightarrow V_5 = 3V_2 \Rightarrow$$

$$V_5 = 3R_9 \omega_m \frac{Z_7}{Z_8}$$

$$V_3 = \frac{2}{3} V_5 \Rightarrow$$

$$V_3 = 2R_9 \omega_m \frac{Z_7}{Z_8}$$

Enfin d'après l'énoncé $V_4 = V_5$:

$$\Rightarrow V_4 = 3R_9 \omega_m \frac{Z_7}{Z_8}$$

Donc

$$E_c(E/T_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_7}{Z_8}\right)^2 \omega_m^2 [m_6 R_{10}^2 + (m_2 + 4m_3 + 9(m_4 + m_5)R_9^2)] = \frac{1}{2} J_{\text{équivalent}} \omega_m^2$$

7° - En déduire le moment d'inertie équivalent $J_{\text{équivalent}}$ de l'ensemble (E) ramené sur l'axe moteur. Faire l'application numérique en prenant $m_6 = 923 \text{ kg}$.

$$J_{\text{équivalent}} = \left(\frac{Z_7}{Z_8}\right)^2 [m_6 R_{10}^2 + (m_2 + 4m_3 + 9(m_4 + m_5)R_9^2)] = 1,407 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

8° - Appliquer le théorème de l'énergie cinétique (appelé aussi théorème de l'énergie puissance) au système E= (6, T2, T3, T4, 5) dans son mouvement par rapport à (T1) et en déduire C_m en fonction de ω_m et $(\frac{d}{dt}\omega_m)$.

Faire l'application numérique en prenant :

$$\left[\omega_m = 257,77 \text{ rad/s} \right] \text{ et } \left[\frac{d}{dt}\omega_m = 194,62 \text{ rad/s}^2 \right].$$

Théorème de l'énergie cinétique : $\frac{d}{dt}E_c(E/T_1) = C_m\omega_m - (\mu\omega_m)\omega_m$

$$\Rightarrow J_{\text{équivalent}}\omega_m \frac{d}{dt}\omega_m = C_m\omega_m - (\mu\omega_m)\omega_m$$

$$\Rightarrow C_m = J_{\text{équivalent}}\left(\frac{d}{dt}\omega_m\right) + \mu\omega_m = 2,842 \text{ mN}$$

Partie B. Effort exercé par le machiniste pour changer la position du télescope :

9° - Appliquer le principe fondamental de la dynamique à (W) par rapport à (0) et déterminer les expressions des efforts F_y et F_z en fonction des données et des paramètres et leurs dérivées.

$$\left\{ \begin{array}{l} F_z\vec{z} + F_y\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_K + \left\{ \begin{array}{l} -m_W g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_W} + \left\{ \begin{array}{l} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_x\vec{x} \end{array} \right\}_{G_W} = \left\{ \begin{array}{l} m_W \vec{\gamma}_{(G_W/R_0)} \\ \vec{\delta}_{G_W}(W/R_0) \end{array} \right\}_{G_W} \quad \text{avec} \quad \vec{\gamma}_{(G_W/R_0)} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{G_W} = \vec{M}_K + \vec{G}_W \vec{K} \wedge (F_z\vec{z} + F_y\vec{y}) = (-h\vec{x}) \wedge (F_z\vec{z} + F_y\vec{y}) = hF_z\vec{y} - hF_y\vec{z}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_z\vec{z} + F_y\vec{y} \\ hF_z\vec{y} - hF_y\vec{z} \end{array} \right\}_{G_W} + \left\{ \begin{array}{l} -m_W g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_W} + \left\{ \begin{array}{l} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_x\vec{x} \end{array} \right\}_{G_W} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{\delta}_{G_W}(W/R_0) \end{array} \right\}_{G_W}$$

$$\text{Moment cinétique de } W/R_0 : \vec{\sigma}_{G_W}(W/R_0) = \vec{I}_{G_W}(W) \cdot \vec{\Omega}(W/R_0) = \vec{I}_{G_W}(W) \cdot (\dot{\theta}\vec{y}_0 + \dot{\phi}\vec{z})$$

$$\vec{\sigma}_{G_W}(W/R_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = B\dot{\theta} \cos \varphi \vec{y} + B\dot{\phi} \vec{z}$$

$$\text{Moment dynamique de } W/R_0 : \vec{\delta}_{G_W}(W/R_0) = \left(\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G_W}(W/R_0) \right)_{R_0}$$

$$\vec{y}.TMD \Rightarrow hF_z = \vec{y} \cdot \vec{\delta}_{G_W}(W/R_0) = \vec{y} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G_W}(W/R_0) \right] = \frac{d}{dt} (\vec{y} \cdot \vec{\sigma}_{G_W}(W/R_0)) - \vec{\sigma}_{G_W}(W/R_0) \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{y} \right)_{R_0}$$

$$\vec{z}.TMD \Rightarrow -hF_y = \vec{z} \cdot \vec{\delta}_{G_W}(W/R_0) = \vec{z} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G_W}(W/R_0) \right] = \frac{d}{dt} (\vec{z} \cdot \vec{\sigma}_{G_W}(W/R_0)) - \vec{\sigma}_{G_W}(W/R_0) \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{z} \right)_{R_0}$$

$$\text{Avec } \left(\frac{d}{dt} \vec{y} \right)_{R_0} = \dot{\theta} \sin \varphi \vec{z} - \dot{\phi} \vec{x} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d}{dt} \vec{z} \right)_{R_0} = \dot{\theta} \vec{u}$$

$$\vec{y}.TMD \Rightarrow hF_z = B\ddot{\theta}\cos\varphi - B\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi - B\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi = B(\ddot{\theta}\cos\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi)$$

$$\vec{z}.TMD \Rightarrow -hF_y = B\ddot{\varphi} + B\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi = B(\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$hF_z = B(\ddot{\theta}\cos\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi)$$

$$-hF_y = B(\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi)$$

10° - Calculer l'effort qu'exerce le machiniste : $\|\vec{F}_{\text{machiniste}}\|$ dans les deux cas suivants :

- Début d'accélération :

$$\theta = \varphi = 0$$

$$\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{\theta} = 0,0157 \text{ rd/s}^2$$

$$\ddot{\varphi} = 0,0078 \text{ rd/s}^2$$

$$F_z = \frac{B}{h}\ddot{\theta} = 196,9 \text{ N} \quad \text{et} \quad F_y = -\frac{B}{h}\ddot{\varphi} = -97,8 \text{ N} \quad \text{d'où} \quad F_{\text{machiniste}} = \sqrt{F_y^2 + F_z^2} = 219,8 \text{ N}$$

- Début de décélération :

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \pi/4$$

$$\dot{\theta} = 0,078 \text{ rd/s}$$

$$\dot{\varphi} = 0,0392 \text{ rd/s}$$

$$\ddot{\theta} = -0,0157 \text{ rd/s}^2$$

$$\ddot{\varphi} = -0,0078 \text{ rd/s}^2$$

$$F_z = \frac{B}{h}\left(\ddot{\theta}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -193,5 \text{ N} \quad \text{et} \quad F_y = \frac{-B}{h}\left(\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 59,69 \text{ N}$$

$$\text{d'où} \quad F_{\text{machiniste}} = \sqrt{F_y^2 + F_z^2} = 202,49 \text{ N}$$

Partie C. Déformation du télescope de la grue :

11° - Déterminer le torseur de l'action du bâti sur la poutre en O : $\{\text{bâti} \rightarrow \text{poutre}\}_O$.

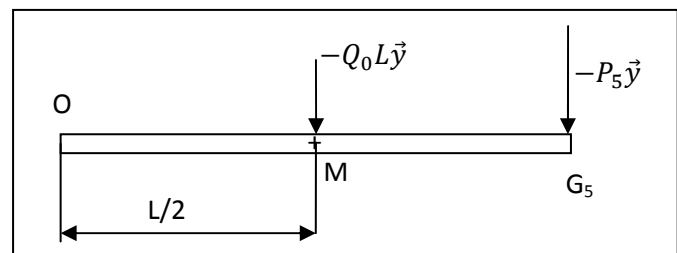
$$\text{Equilibre de la poutre :} \quad \{\text{Bâti} \rightarrow \text{Poutre}\}_O + \left\{ \begin{array}{c} -Q_0L\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M + \left\{ \begin{array}{c} -P_5\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_5} = \{\vec{0}\}$$

$$\text{Avec: } \vec{M}_O = \vec{OM} \wedge (-Q_0L\vec{y})$$

$$\vec{M}_O = \left(\frac{L}{2}\right)\vec{x} \wedge (-Q_0L\vec{y})$$

$$\vec{M}_O = -Q_0\frac{L^2}{2}\vec{z}$$

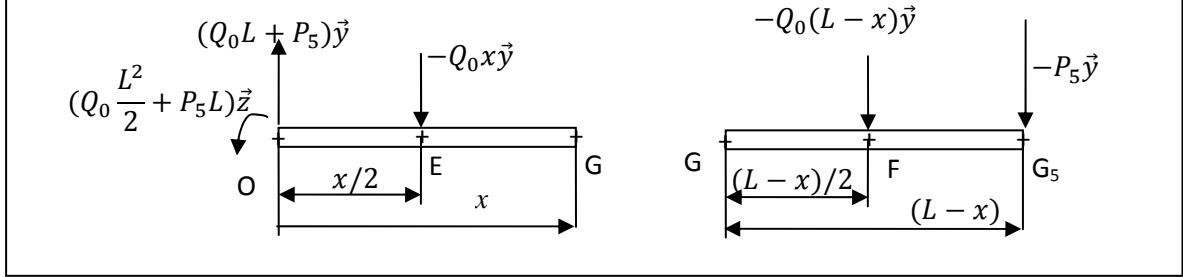
$$\text{et : } \vec{M}_O = \vec{OG_5} \wedge (-P_5\vec{y}) = -P_5L\vec{z}$$



$$\text{Donc} \quad \{\text{Bâti} \rightarrow \text{Poutre}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} (Q_0L + P_5)\vec{y} \\ (Q_0\frac{L^2}{2} + P_5L)\vec{z} \end{array} \right\}_O$$

12°-

Coupure de la poutre à une distance (x) de O :



Torseur de cohésion :

$$\{\tau_{coh}\}_G = + \left\{ \begin{matrix} -Q_0(L-x)\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_F + \left\{ \begin{matrix} -P_5\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_5}$$

$$\vec{M}_G = \vec{GF} \wedge (-Q_0(L-x)\vec{y})$$

$$\vec{M}_G = \vec{GG_5} \wedge (-P_5\vec{y})$$

$$\vec{M}_G = \left(\frac{L-x}{2}\right)\vec{x} \wedge (-Q_0(L-x)\vec{y})$$

$$\vec{M}_G = (L-x)\vec{x} \wedge (-P_5\vec{y})$$

$$\vec{M}_G = -Q_0 \frac{(L-x)^2}{2} \vec{z}$$

$$\vec{M}_G = -P_5(L-x)\vec{z}$$

Donc : $\{\tau_{coh}\}_G = + \left\{ \begin{matrix} (-Q_0(L-x) - P_5)\vec{y} \\ (-Q_0 \frac{(L-x)^2}{2} - P_5(L-x))\vec{z} \end{matrix} \right\}_G$

$$\{\tau_{coh}\}_G = \left\{ \begin{matrix} N = 0 & M_t = 0 \\ T_y = -Q_0(L-x) - P_5 & M_{fy} = 0 \\ T_z = 0 & M_{fz} = -Q_0 \frac{(L-x)^2}{2} - P_5(L-x) \end{matrix} \right\}_G$$

13°-

Déterminer le moment quadratique I_{Gz} de la section par rapport à l'axe (G, \vec{z}) .

Faire l'application numérique sachant que : $b = 380 \text{ mm}$ $e = 25 \text{ mm}$
 $a = 260 \text{ mm}$ $D = 50 \text{ mm}$.

$$I_{Gz} = I_{Gz}(\text{de la section si elle était pleine}) - I_{Gz}(\text{de la partie creuse de la section})$$

Donc : $I_{Gz} = \frac{ab^3}{12} - \frac{(a-2e)(b-2D)^3}{12}$

Donc : $I_{Gz} = 8,047 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$

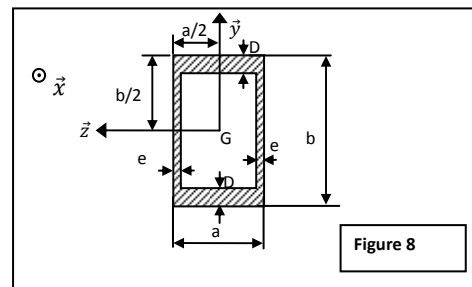


Figure 8

14° - L'expression de la déformée de la poutre est :

$$Y(x) = \frac{1}{EI_{Gz}} \left\{ \frac{Q_0}{24} [L^4 - (L-x)^4] + \frac{P_5}{6} [L^3 - (L-x)^3] - \left[\frac{Q_0 L^3}{6} + \frac{P_5 L^2}{2} \right] x \right\}.$$

Déterminer l'expression et la valeur numérique de la flèche de la poutre en G_5 :
 $Y(x=L)$ sachant que : $E = 70000 \text{ Mpa}$

on prendra $I_{Gz} = 8 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$

$Q_0 = 181 \text{ N/m}$

$m_5 = 100 \text{ kg}$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$ accélération de pesanteur.

$$Y(x=L) = \frac{1}{EI_{Gz}} \left\{ \frac{Q_0 L^4}{24} + \frac{P_5 L^3}{6} - \frac{Q_0 L^4}{6} - \frac{P_5 L^3}{2} \right\}$$

$$Y(x=L) = \frac{1}{EI_{Gz}} \left\{ \frac{-Q_0 L^4}{8} - \frac{P_5 L^3}{3} \right\}$$

$$Y(x=L) = \frac{-L^3}{EI_{Gz}} \left\{ \frac{Q_0 L}{8} + \frac{P_5}{3} \right\}$$

$$Y(x=L) = -9,063 \text{ mm}$$

Partie D. Roue motrice du chariot :

15° - A l'aide de la formule de WILLIS déterminer la relation entre les vitesses angulaires ω_4 et ω_1 .

On isole le train épicycloïdal et on libère toutes les roues :

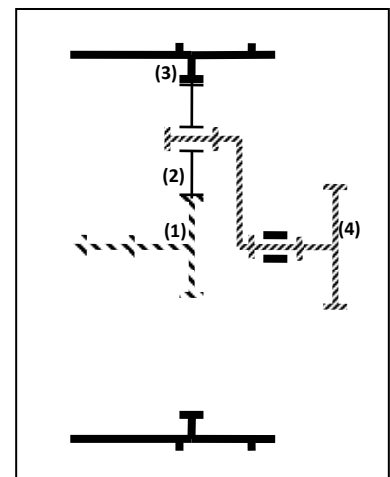
Formule de WILLIS :

$$\frac{\omega_3 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = (-1)^1 \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_2}{Z_3}$$

puis on le remet dans le montage $\Rightarrow \omega_3 = 0$

donc :
$$\frac{0 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = (-1)^1 \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_2}{Z_3}$$

$$\text{donc : } \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}$$



16° - Déterminer la relation entre les vitesses angulaires ω_6 et ω_4 .

(4), (5) et (6) forment un train ordinaire, donc :

$$\frac{\omega_6}{\omega_4} = (-1)^1 \frac{Z_4}{Z_5} \cdot \frac{Z_5}{Z_6} = -\frac{Z_4}{Z_6}$$

17° - En déduire la relation entre les vitesses angulaires ω_6 et ω_1 . Calculer $|\omega_6|$ sachant que $\omega_1 = 105 \text{ rad/s}$.

$$\frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\omega_6}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_1} = \left(-\frac{Z_4}{Z_6}\right) \cdot \left(\frac{Z_1}{Z_1+Z_3}\right)$$

Donc :

$$|\omega_6| = 7,858 \text{ rd/s}$$

18° - En déduire la vitesse d'avance du chariot en (km/h) si le rayon de la roue est $R_{\text{roue}} = 160 \text{ mm}$ et que les quatre roues roulent en ligne droite sans glisser sur le sol.

$$V = R_{\text{roue}} \cdot \omega_6 = 1,257 \text{ m/s} = 4,526 \text{ km/h}$$

19° - En se basant sur les données de cette partie D et le document 4/4, compléter le diagramme de définition de blocs sur le document à rendre 1/1.

