

**Partie A : Etude de la stabilité de la grue face au vent (étude statique) :**

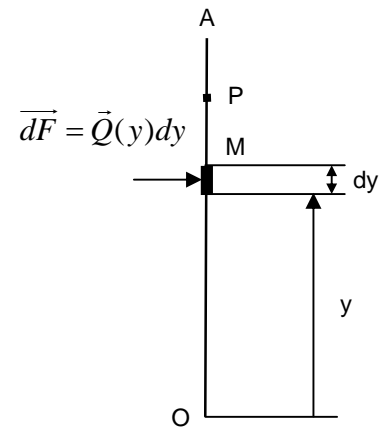
$$\mathbf{A1-} \{ \text{vent} \rightarrow 1 \} = \left\{ \begin{matrix} F \vec{x} \\ M_o \vec{z} \end{matrix} \right\}_o = \left\{ \begin{matrix} \int d\vec{F} \\ \int \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F} \end{matrix} \right\}_o = \left\{ \begin{matrix} \int \vec{Q}(y) dy \\ \int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{Q}(y) dy \end{matrix} \right\}_o$$

$$\vec{Q}(y) = ky\vec{x}$$

$$\overrightarrow{OM} = y\vec{y}$$

$$\left\{ \begin{matrix} F \vec{x} \\ M_o \vec{z} \end{matrix} \right\}_o = \left\{ \begin{matrix} \int_0^h ky\vec{x} dy \\ \int_0^h -ky^2 dy \vec{z} \end{matrix} \right\}_o = \left\{ \begin{matrix} k \frac{h^2}{2} \vec{x} \\ -k \frac{h^3}{3} \vec{z} \end{matrix} \right\}_o$$

$$\vec{M}_P = \vec{M}_o + \overrightarrow{PO} \wedge k \frac{h^2}{2} \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow -k \frac{h^3}{3} \vec{z} + Lk \frac{h^2}{2} \vec{z} = \vec{0} \Rightarrow L = \frac{2}{3}h$$



$$\mathbf{A2-} \left\{ \begin{matrix} F\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_P + \left\{ \begin{matrix} X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{O_1} + \left\{ \begin{matrix} Y_2\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{O_2} + \left\{ \begin{matrix} -m_3g\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_D + \left\{ \begin{matrix} -m_1g\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_1} + \left\{ \begin{matrix} -m_2g\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_2} + \left\{ \begin{matrix} -M_u g\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$$

$$\vec{M}_{O_1} = \overrightarrow{O_1P} \wedge F\vec{x} = (-e\vec{x} + L\vec{y}) \wedge F\vec{x} = \boxed{-LF\vec{z}}$$

$$\vec{M}_{O_1} = \overrightarrow{O_1O_2} \wedge Y_2\vec{y} = -2e\vec{x} \wedge Y_2\vec{y} = \boxed{-2eY_2\vec{z}}$$

$$\vec{M}_{O_1} = \overrightarrow{O_1D} \wedge (-m_3g\vec{y}) = (-e\vec{x} + h\vec{y} - c\vec{x}) \wedge (-m_3g\vec{y}) = \boxed{(e+c)m_3g\vec{z}}$$

$$\vec{M}_{O_1} = \overrightarrow{O_1G_1} \wedge (-m_1g\vec{y}) = (-e\vec{x} + a\vec{y}) \wedge (-m_1g\vec{y}) = \boxed{em_1g\vec{z}}$$

$$\vec{M}_{O_1} = \overrightarrow{O_1G_2} \wedge (-m_2g\vec{y}) = (-e\vec{x} + h\vec{y} + b\vec{x}) \wedge (-m_2g\vec{y}) = \boxed{-(b-e)m_2g\vec{z}}$$

$$\vec{M}_{O_1} = \overrightarrow{O_1C} \wedge (-M_u g\vec{y}) = (-e\vec{x} + h\vec{y} + x\vec{x} - d\vec{y}) \wedge (-M_u g\vec{y}) = \boxed{-(x-e)M_u g\vec{z}}$$

Théorème du moment Statique  $\Rightarrow -LF - 2eY_2 + (e+c)m_3g + em_1g - (b-e)m_2g - (x-e)M_u g = 0$

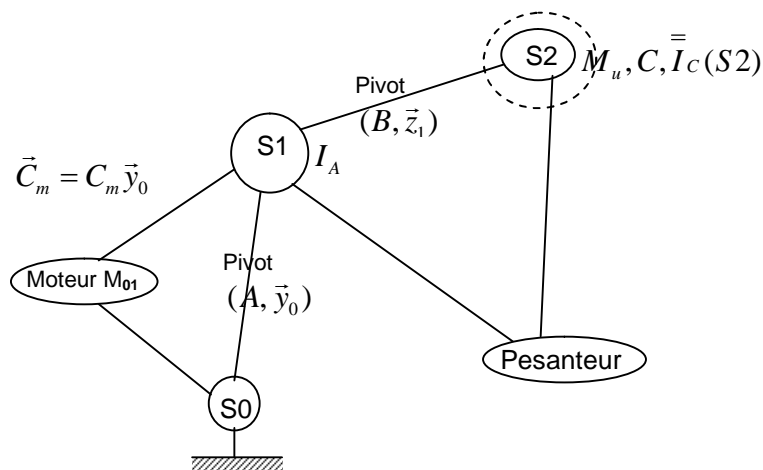
$$\Rightarrow Y_2 = \frac{1}{2e} \left[ -LF + (e+c)m_3g + em_1g - (b-e)m_2g - (x-e)M_u g \right]$$

**A3-** Si le vent renverse la grue  $\Rightarrow Y_2=0$

$$\Rightarrow M_{u(Maxi)} = \frac{-LF + (e+c)m_3g + em_1g - (b-e)m_2g}{(x-e)g}$$

**Parte B : Etude dynamique de la grue :**

**B1-** Schéma d'analyse :



**B2-**

$$\vec{\Omega}(S_2 / S_0) = \vec{\Omega}(S_2 / S_1) + \vec{\Omega}(S_1 / S_0) = \dot{\varphi} \vec{z}_2 + \dot{\theta} \vec{y}_0$$

$$\boxed{\vec{\Omega}(S_2 / S_0) = \dot{\theta} \sin \varphi \vec{x}_2 + \dot{\theta} \cos \varphi \vec{y}_2 + \dot{\varphi} \vec{z}_2}$$

**B3-**

$$\vec{V}_C(S_2 / S_0) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -x\dot{\theta} \vec{z}_2 - d \frac{d}{dt} \vec{y}_2 \Big|_{R0} \quad \text{avec} \quad \frac{d}{dt} \vec{y}_2 \Big|_{R0} = \vec{\Omega}(S_2 / S_0) \wedge \vec{y}_2$$

$$= -\dot{\varphi} \vec{x}_2 + \dot{\theta} \sin \varphi \vec{z}_2$$

$$\boxed{\vec{V}_C(S_2 / S_0) = d\dot{\varphi} \vec{x}_2 - (x + d \sin \varphi) \dot{\theta} \vec{z}_2}$$

**B4-**

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_B(S_2 / S_0) &= \vec{\sigma}_C(S_2 / S_0) + \overrightarrow{BC} \wedge M_u \vec{V}_C(S_2 / S_0) \\ &= \overline{I}_C(S_2) \vec{\Omega}(S_2 / S_0) + (-d\vec{y}_2) \wedge M_u \vec{V}_C(S_2 / S_0) \\ &= \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} - dM_u \begin{bmatrix} -d\dot{\varphi} \vec{z}_2 - (x + d \sin \varphi) \dot{\theta} \vec{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_2 \dot{\theta} \sin \varphi + dM_u(x + d \sin \varphi) \dot{\theta} \\ A_2 \dot{\theta} \cos \varphi \\ (C_2 + M_u d^2) \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \end{aligned}$$

**B5-**

$$\begin{aligned} \vec{z}_2 \vec{\delta}_B(S_2 / S_0) &= \vec{z}_2 \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_B(S_2 / S_0) \Big|_{R0} + \vec{V}(B/0) \wedge M_u \vec{V}_C(S_2 / S_0) \right] \\ &= \frac{d}{dt} [\vec{z}_2 \vec{\sigma}_B(S_2 / S_0)] - \vec{\sigma}_B(S_2 / S_0) \frac{d}{dt} \vec{z}_2 \Big|_{R0} + \underbrace{\vec{z}_2 [\vec{V}(B/0) \wedge M_u \vec{V}_C(S_2 / S_0)]}_{\simeq = \vec{0} \text{ car } \vec{V}(B/0) \text{ portée par } \vec{z}_2} \\ &= \frac{d}{dt} [(C_2 + M_u d^2) \dot{\varphi}] - \vec{\sigma}_B(S_2 / S_0) \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \frac{d}{dt} \vec{z}_2 \Big|_{R0} = \vec{\Omega}(S_2 / S_0) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta} \cos \varphi \vec{x}_2 - \dot{\theta} \sin \varphi \vec{y}_2$$

$$= (C_2 + M_u d^2) \ddot{\varphi} - [A_2 \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi + dM_u(x + d \sin \varphi) \dot{\theta}^2 \cos \varphi - A_2 \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi]$$

$$= \boxed{(C_2 + M_u d^2) \ddot{\varphi} - dM_u(x + d \sin \varphi) \dot{\theta}^2 \cos \varphi}$$

**B6-**

*Théorème du Moment Dynamique appliqué à  $S_2$  projeté sur  $\vec{z}_2$  :*

$$\vec{z}_2 TMD \Rightarrow \vec{z}_2 \vec{\delta}_B(S_2 / S_0) = \vec{z}_2 \vec{M}_B(\vec{F}_{ext})$$

$$\{pes \rightarrow S_2\} + \{S_1 \rightarrow S_2\} = \left\{ \begin{matrix} M_u \vec{\gamma}_{(C/R0)} \\ \vec{\delta}(S_2 / S_0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underbrace{\left\{ \begin{matrix} -M_u g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C}_{\substack{\vec{M}_B = \overrightarrow{BC} \wedge (-M_u g \vec{y}_0) \\ = (-d\vec{y}_2) \wedge (-M_u g \vec{y}_0) \\ = -dM_u g \sin \varphi \vec{z}_2}} + \left\{ \begin{matrix} X\vec{x}_2 + Y\vec{y}_2 + Z\vec{z}_2 \\ L\vec{x}_2 + M\vec{y}_2 \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} M_u \vec{\gamma}_{(C/R0)} \\ \vec{\delta}_B(S_2 / S_0) \end{matrix} \right\}_B$$

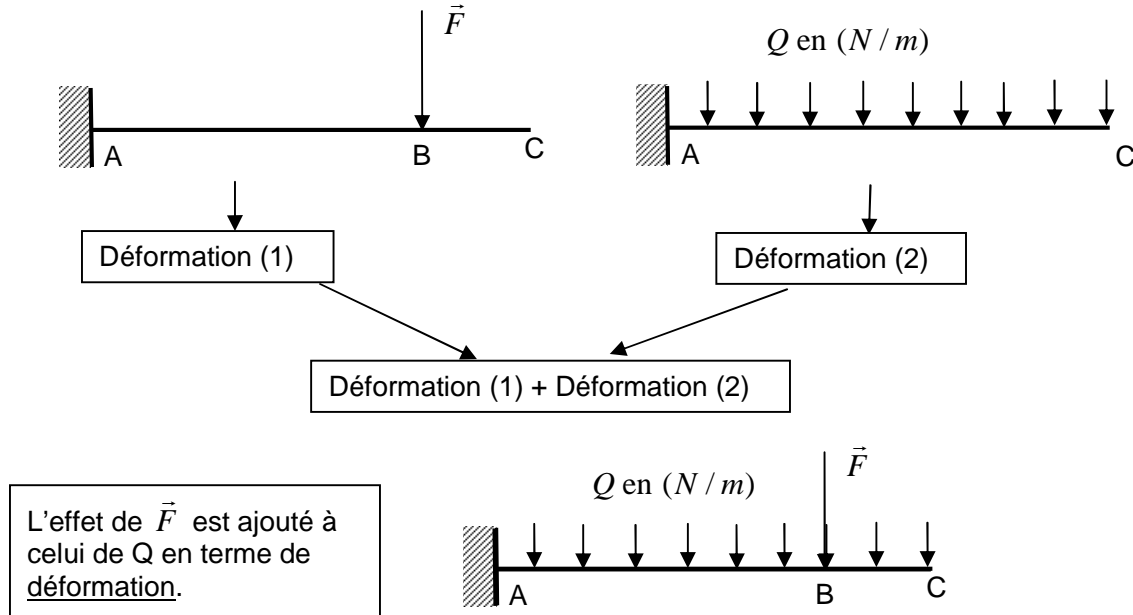
$$\vec{z}_2 TMD \Rightarrow -dM_u g \sin \varphi + 0 = \vec{z}_2 \vec{\delta}_B(S_2 / S_0)$$

$$\Rightarrow -dM_u g \sin \varphi = (C_2 + M_u d^2) \ddot{\varphi} - dM_u (x + d \sin \varphi) \dot{\theta}^2 \cos \varphi$$

$$\Rightarrow (C_2 + M_u d^2) \ddot{\varphi} + dM_u [g \sin \varphi - \dot{\theta}^2 (x + d \sin \varphi) \cos \varphi] = 0$$

**Parte C : Etude de la résistance de la flèche :**

**C1- Principe de superposition appliqué à notre cas:**



**C2-**

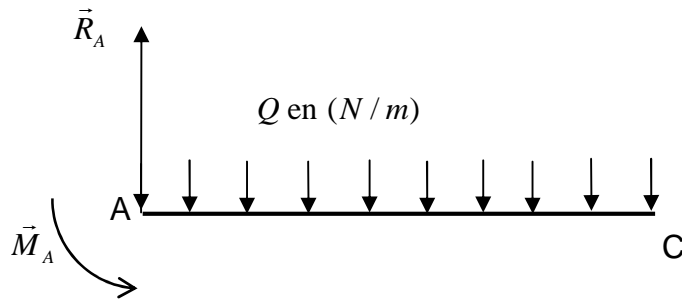
Dans les questions suivantes :  $\vec{F} = \vec{0}$

Réaction à l'encastrement en A ; application du principe fondamental de la statique à la poutre :

$$\overline{AC} = h\vec{x}$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{R}_A \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -Qh\vec{y} \\ -Q\frac{h^2}{2}\vec{z} \end{Bmatrix}_A = \{\vec{0}\}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{R}_A \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} Qh\vec{y} \\ Q\frac{h^2}{2}\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$



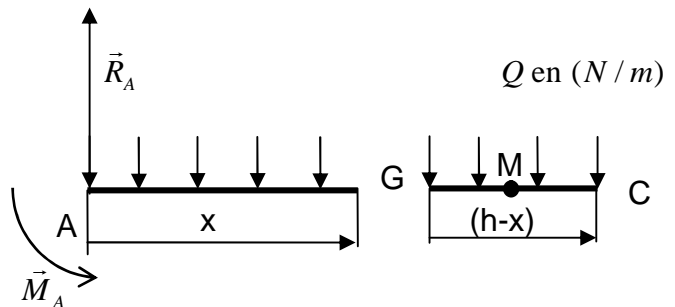
**C3- Torseur de cohésion :**

$$\{\tau_{coh}\}_G = + \begin{Bmatrix} -Q(h-x)\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M \quad \text{tel que} \quad \overline{GM} = \frac{(h-x)}{2}\vec{x}$$

$$\vec{M}_G = \overline{GM} \wedge [-Q(h-x)]\vec{y} = -Q\frac{(h-x)^2}{2}\vec{z}$$

$$= -\frac{Q}{2}(h^2 - 2hx + x^2)$$

donc  $M_{fz} = -\frac{Q}{2}x^2 + Qhx - \frac{Qh^2}{2}$



**C4- Conditions aux limites :**

Déplacement du point A après déformation :  $Y_A = Y(0) = 0$ ,  
 Pente de la poutre au point A après déformation :  $Y' = Y'(0) = 0$

**C5-**

$$Y''(x) = \frac{M_{fx}}{EI_{Gz}} = \frac{Q}{2EI_{Gz}}(-x^2 - h^2 + 2hx) \quad ; \quad Y'(x) = \frac{Q}{2EI_{Gz}}\left(-\frac{x^3}{3} - h^2x + hx^2\right) + K_1$$

$$Y(x) = \frac{Q}{2EI_{Gz}}\left(-\frac{x^4}{12} - h^2\frac{x^2}{2} + h\frac{x^3}{3}\right) + K_1x + K_2 \quad \text{avec } Y(0) = Y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{K_1 = K_2 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(x) = \frac{Qx^2}{24EI_{Gz}}(-x^2 - 6h^2 + 4hx)}$$

$$Y_C = Y(h) = \frac{Qh^2}{24EI_{Gz}}(-h^2 - 6h^2 + 4h^2) \quad \Rightarrow \boxed{Y_C = Y(h) = \frac{-Qh^4}{8EI_{Gz}}}$$

**Parte D : Etude du frein de la charge (étude de construction) :**

**D1-** Si le moteur électrique est alimenté il soulève la charge, sinon cette dernière est libre de chuter vers le bas. Pour éviter cette chute le frein à manque de courant agit une fois le moteur n'est plus alimenté (que ce soit à volonté ou en cas de coupure de courant).

**D2-** E1 : le ressort (15).  
 E2 : l'écrou (16).  
 E3 : les écrous (17) ; **1-** desserrer les écrous (17),  
**2-** régler le jeu (e) c'est-à-dire la position de (18) par rapport à (14),  
**3-** serre les écrous (17).

**D3-**

$$C_r = M_u \cdot g \cdot \frac{d_i}{2} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (d_1 = 223\text{mm} \quad , \quad d_2 = 236,6\text{mm} \quad , \quad d_3 = 250,2\text{mm})$$

$$\text{Le rendement est } \eta = \frac{\text{puissance développée par la charge}}{\text{puissance développée par le frein}} = \frac{C_r \omega_r}{C_f \omega_f} = 1$$

$$\Rightarrow C_f = \frac{C_r \omega_r}{\omega_f} = C_r R \quad , \quad R = \frac{\omega_r}{\omega_f} = 0,2 \quad \text{rapport de transmission du réducteur.}$$

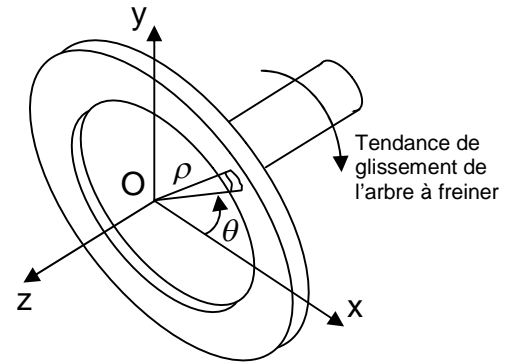
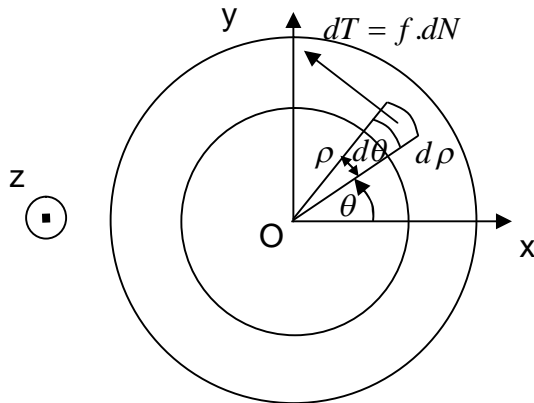
$$\Rightarrow \boxed{C_f = M_u \cdot g \cdot \frac{d_i}{2} R} \quad \text{Application numérique: } C_{f1} = 437 \quad (\text{mN})$$

$$C_{f2} = 463,7 \quad (\text{mN})$$

$$C_{f3} = 490,4 \quad (\text{mN})$$

Le frein doit donc produire un couple de freinage de 491(mN) au minimum.

## D4- Couple de freinage



$d\mathbf{T}$  : effort tangentiel =  $f \cdot d\mathbf{N}$

$d\mathbf{N}$  : effort normal =  $p \cdot d\mathbf{S}$  porté par  $-\vec{z}$

$p$  : pression de contact générée par l'effort presseur  $\vec{F}$  telle que  $p = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi(R^2 - r^2)}$

$dS = \rho d\theta \cdot d\rho$  ,  $\rho \in [r, R]$  ,  $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
 C_f &= \|\vec{M}_O(\text{Bati} \rightarrow \text{Arbre})\| = \iint \rho \cdot dT \\
 &= \iint \rho \cdot f \cdot dN \\
 &= \iint \rho \cdot f \cdot \frac{F}{\pi(R^2 - r^2)} \cdot \rho \cdot d\theta \cdot d\rho \\
 &= f \cdot \frac{F}{\pi(R^2 - r^2)} \int_r^R \rho^2 \cdot d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{2}{3} \cdot f \cdot F \frac{(R^3 - r^3)}{(R^2 - r^2)} \quad \text{Pour une seule surface de contact entre le bati et l'arbre à freiner.}
 \end{aligned}$$

Pour (n) contacts entre le bati et l'arbre à freiner:  $C_f = \frac{2}{3} \cdot n \cdot f \cdot F \frac{(R^3 - r^3)}{(R^2 - r^2)}$

\* Dans le cas du frein du document 1 :  $n=4$ .