

# CORRIGE SUJET N°1

E3A PSI 2007

## Question 1.1.a

Évènements extérieurs	Situations	évènements internes <sup>(1)</sup>
Marche = 1	{1, 100, 50, 10}	
b = 1	{1, 120, 50, 10}	
b = 0	{1, 120, 50, 10}	
	{1, 130, 50, 10}	0,5s/X120
	{1, 130, 50, 11, 15}	
/	{1, 130, 50, 12, 16}	Vis-a>vis_a1 Vis_d>visd1
	{1, 130, 50, 14, 16} <sup>(2)</sup> ou {1, 130, 50, 12, 18}	Vis-a = vis_a1 ou Vis_d = visd1
	{1, 130, 50, 19}	
	{1, 100, 50, 19}	X19
	{1, 100, 50, 10}	1s/X19

(1) Ces variables sont internes (mémoires) au système étudié.

(2) Les durées n'étant pas connues les situations peuvent être inversées chronologiquement.

## Question 1.1.b

Évènements extérieurs	Situations	évènements internes
Marche = 1	{1, 100, 50, 10}	
b = 1	{1, 120, 50, 10}	
b = 1	{1, 150, 50, 10}	0,5s/X120
	{1, 150, 51, 10}	X150
b = 0	{1, 150, 52, 10}	
	{1, 100, 50, 10}	

## Question 1.1.c

Évènements extérieurs	Situations
c = 1	{1, 50, 130, 13, 18}
c = 0	{1, 50, 131, 10}
	{1, 50, 100, 10}

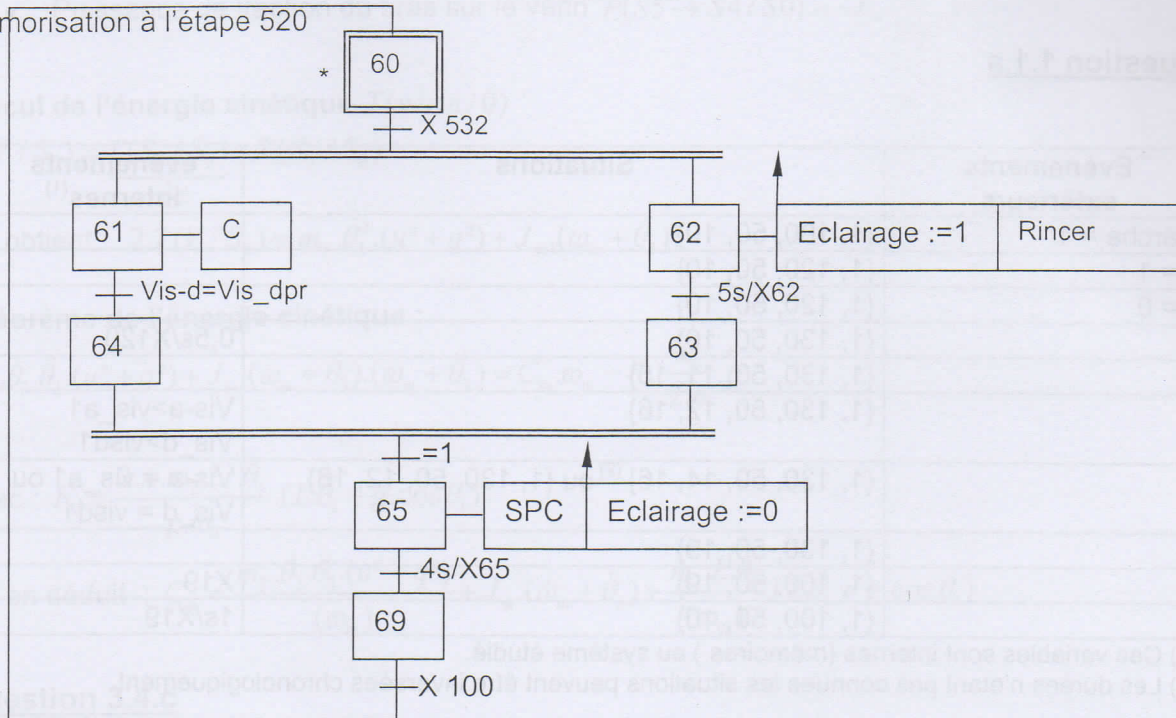
On a un forçage à l'étape 10 du GP1

## Question 1.1.d

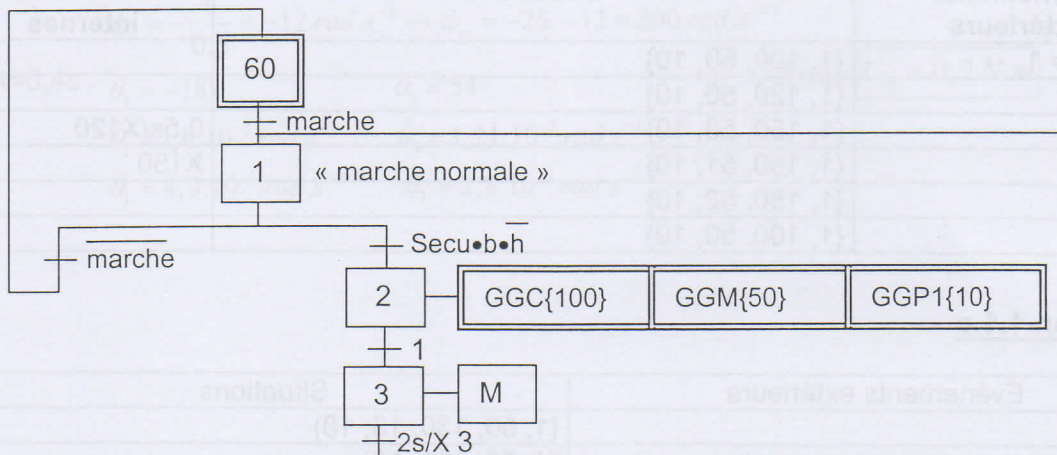
Évènements extérieurs	Situations
	{1, 50, 10, 100}
cr = 1	{1, 50, 10, 520}
er = 1	{1, 50, 10, 530}
cr = 0	{1, 50, 10, 531}
cr = 1	{1, 50, 10, 532}

### Question 1.1.e

Mémorisation à l'étape 520



### Question 1.1.f



### Question 1.2.a

Il suffit d'identifier sur les grafquets les étapes qui permettent la commande

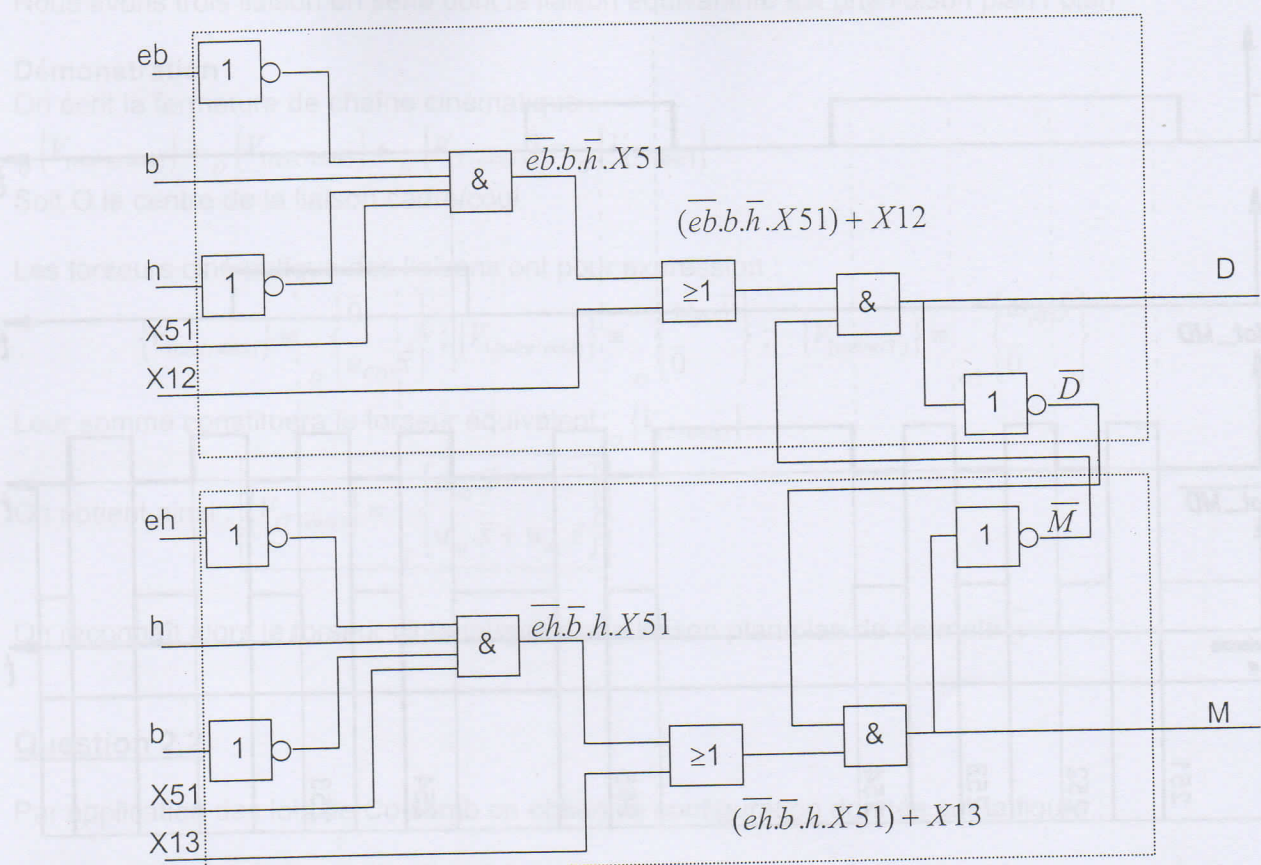
A l'aide du Grafcet GM :  $D = \overline{e}b.\overline{h}.X51$  A l'aide du Grafcet GP :  $D = X12$   
 $M = \overline{e}h.h.\overline{b}.X51$   $M = X13$

Les conditions de sécurité interdisent la commande simultanée :

D'où les résultats suivants :  $D = (\overline{e}b.\overline{h}.X51 + X12).\overline{M}$  et  $M = (\overline{e}h.h.\overline{b}.X51 + X13).\overline{D}$



### Question 1.2.b



### Question 1.3

Si  $n_m$  est le nombre de tour moteur pour un déplacement  $L_v$ , on a la relation  $n_m = \frac{L_v}{k.p}$ ,

Pour une impulsion par tour de moteur, on a  $n_b \approx n_m = \frac{155}{4} \cdot 25 = 968$

Ce qui donne une résolution de  $\frac{155}{968} = 0,16mm$

### Question 1.4.a

Par lecture du grafctet de comptage, on relève que la remise à zéro vis<sub>a</sub> := 0 s'effectue lorsque l'on a  $\uparrow X801$  ou  $X800 \bullet eb$

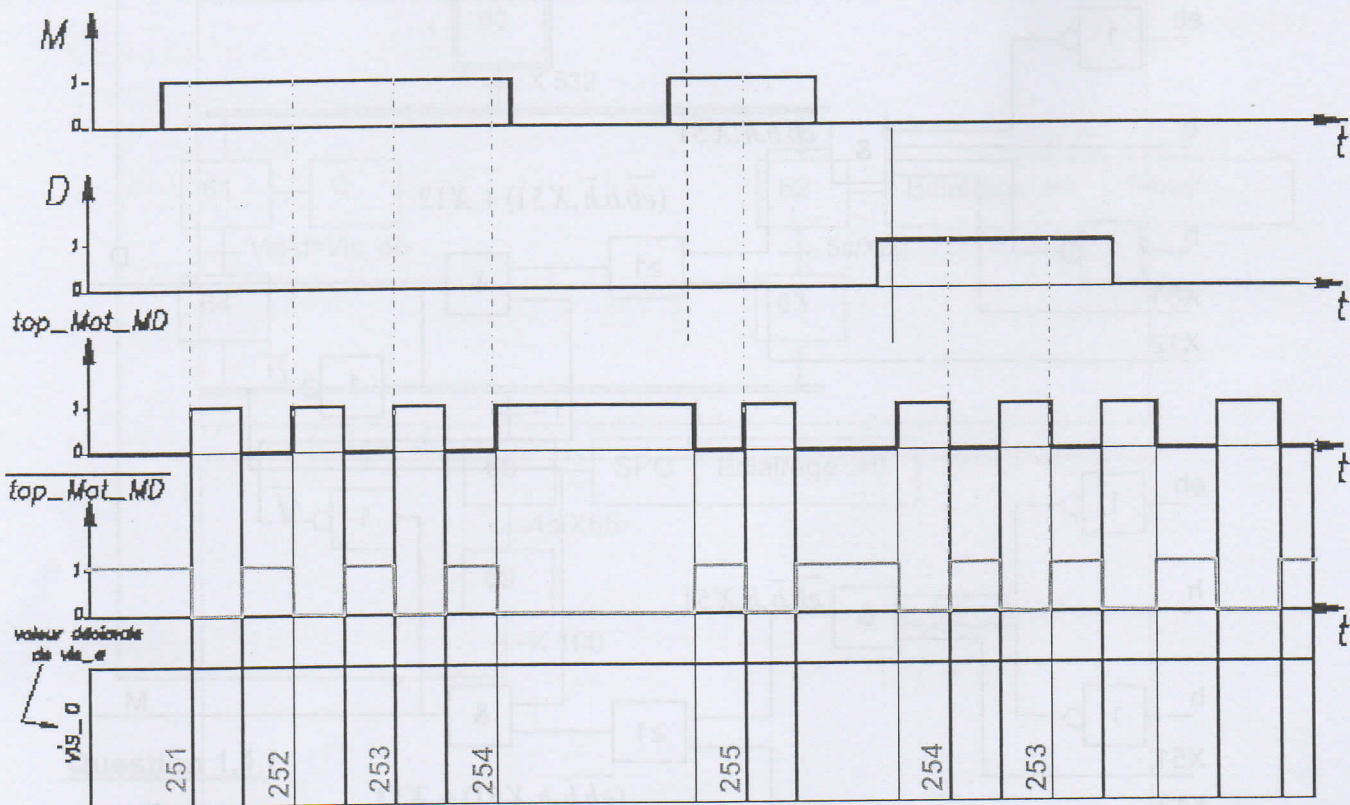
### Question 1.4.b

C'est l'expression d'un nombre décimale dans une base 2 :  $Vis\_a_{(10)} = \sum_{i=0}^k Q_i \cdot 2^i$

### Question 1.4.c

$$Vis\_a_{(10)} = 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 \Rightarrow Vis\_a_{(10)} = 250$$

#### /Question 1.4.d



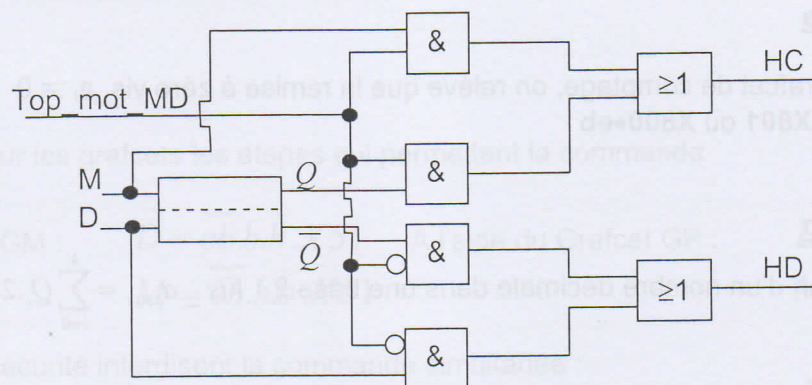
Après relâchement de D, on constate que le capteur continu à envoyer une impulsion de durée plus grande. On peut supposer que l'assise continue à descendre sous l'effet de son inertie et de la gravité en étant freinée par les forces de frottement.

Le compteur n'est pas décrémenté alors que l'assise continue à descendre.

Cela implique une erreur sur la position réelle

#### Question 1.4.e

On peut utiliser une mémoire (bascule)





### Question 2.1

Nous avons trois liaisons en série dont la liaison équivalente est une liaison plan / plan

#### Démonstration

On écrit la fermeture de chaîne cinématique :

$${}_O \{V_{(cadre/coul)}\} + {}_O \{V_{(coul/doss)}\} + {}_O \{V_{(T/cadre)}\} = {}_O \{V_{(T/doss)}\}$$

Soit O le centre de la liaison cadre/coul

Les torseurs cinématique des liaisons ont pour expression :

$$\left\{V_{(coul/doss)}\right\} \equiv \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u_{CD} \cdot \vec{x} \end{Bmatrix}; \left\{V_{(cadre/coul)}\right\} \equiv \begin{Bmatrix} \omega_{y1} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}; \left\{V_{(cadre/T)}\right\} \equiv \begin{Bmatrix} \omega_{y2} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Leur somme constituera le torseur équivalent  ${}_O \{V_{(T/doss)}\}$

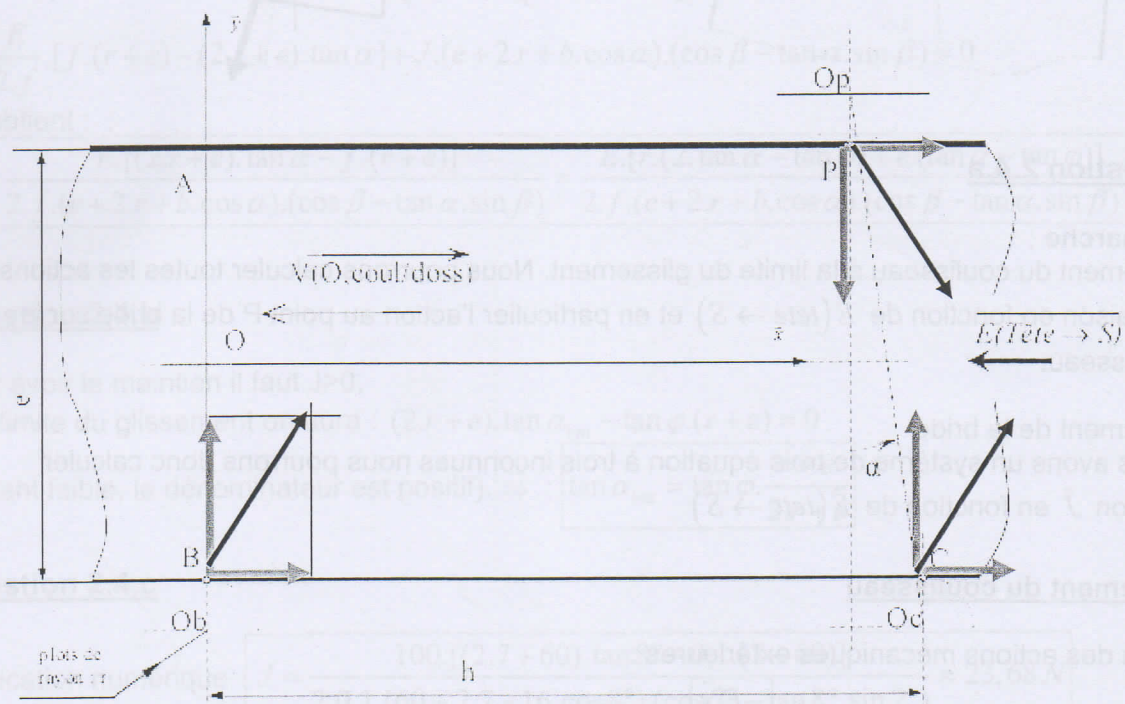
On obtient ainsi :

$$\left\{V_{(T/doss)}\right\} = \begin{Bmatrix} \omega_{eq} \cdot \vec{y} \\ u_{eq} \cdot \vec{x} + w_{eq} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$$

On reconnaît alors le torseur cinématique d'une liaison plan/plan de normale  $\vec{y}$

### Question 2.2

Par application des lois de Coulomb on obtient la configuration donnée sur la figure.:

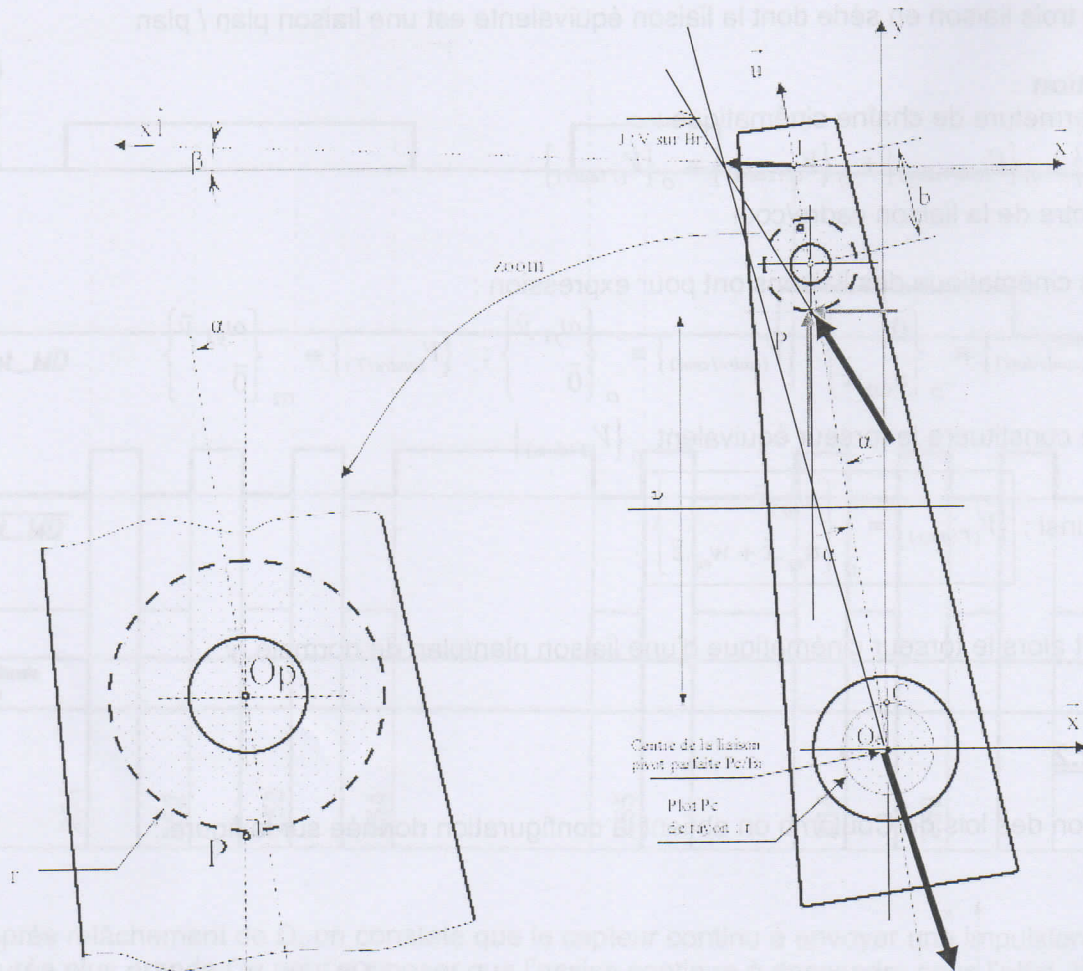


### Question 2.3

Bilan des actions (problème supposé plan) :

- Action du coulisseau (voir ci-dessus)
- Action du vérin : direction donnée, norme inconnue.
- Action du dossier : résultante inconnue (norme et direction)

On obtient la représentation ci-dessous.



### Question 2.4.a

#### Démarche :

Isolement du coulisseau à la limite du glissement. Nous pourrions calculer toutes les actions de liaison en fonction de  $\vec{E}(tete \rightarrow S)$  et en particulier l'action au point P de la bride sur le coulisseau.

Isolement de la bride

Nous avons un système de trois équation à trois inconnues nous pourrions donc calculer l'action  $\vec{J}$  en fonction de  $\vec{E}(tete \rightarrow S)$

#### Isolement du coulisseau

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action de la tête en O :  $\begin{Bmatrix} -E.x \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$ ,
- Action de Pp en P :  $\begin{Bmatrix} \vec{R}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P$ , Action de P<sub>B</sub> en B :  $\begin{Bmatrix} \vec{R}_B \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$ , Action de P<sub>C</sub> en C :  $\begin{Bmatrix} \vec{R}_C \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$ .



PFS :

$$\text{Résultante : } -E.\vec{x} + \vec{R}_p + \vec{R}_B + \vec{R}_C = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} / \vec{x} & f.(Y_p + Y_B + Y_C) = E \\ / \vec{y} & -Y_p + Y_B + Y_C = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nous en déduisons : } Y_p = Y_B + Y_C = \frac{E}{2.f}$$

$$\text{Equation des moments } B, \vec{z} : \vec{M}_B(-E.\vec{x}) + \vec{M}_B(\vec{R}_p) + \vec{M}_B(\vec{R}_B) + \vec{M}_B(\vec{R}_C) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow E.\frac{e}{2} + h.Y_C - Y_p.[h - (e + 2.r).\tan \alpha + e.f] = 0$$

$$\Rightarrow E.\frac{e}{2} + h.Y_C - \frac{E}{2.f}.[h - (e + 2.r).\tan \alpha + e.f] = 0 \Rightarrow Y_C = \frac{E}{2.f.h}.[h - (e + 2.r).\tan \alpha]$$

### Isolement de la bride et plot Pp

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action du coulisseau sur Pp :  $-\begin{Bmatrix} \vec{R}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_p$ ,
- Action de P<sub>C</sub> sur la bride : glisseur en C,
- Action du vérin sur la bride en J :  $\begin{Bmatrix} J.\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_J$ .

$$\text{PFS : Equation des moments sur } O_C, \vec{z} : \vec{M}_{O_C}(-\vec{R}_p) + \vec{M}_{O_C}(\vec{J}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{2.f}.[f.(r + e) - (2.r + e).\tan \alpha] + J.(e + 2.r + b.\cos \alpha).(\cos \beta - \tan \alpha.\sin \beta) = 0$$

On obtient :

$$J = \frac{E.[(2.r + e).\tan \alpha - f.(r + e)]}{2.f.(e + 2.r + b.\cos \alpha).(\cos \beta - \tan \alpha.\sin \beta)} = \frac{E.[r.(2.\tan \alpha - \tan \varphi) + e.(\tan \alpha - \tan \varphi)]}{2.f.(e + 2.r + b.\cos \alpha).(\cos \beta - \tan \alpha.\sin \beta)}$$

### Question 2.4.b

Pour avoir le maintien il faut  $J > 0$ ,

A la limite du glissement on aura :  $(2.r + e).\tan \alpha_{\text{lim}} - \tan \varphi.(r + e) = 0$

$$(\beta \text{ étant faible, le dénominateur est positif}). \Rightarrow : \tan \alpha_{\text{lim}} = \tan \varphi. \frac{r + e}{2.r + e}$$

### Question 2.4.c

Application numérique

$$J = \frac{100.[(2.7 + 60).\tan 8^\circ - 0.1.(7 + 60)]}{2.0.1.(60 + 2.7 + 16.\cos 8^\circ).(\cos 2^\circ - \tan 8^\circ.\sin 2^\circ)} \approx 23,68 \text{ N}$$

### Question 2.4.d

Si  $E > 0$  alors  $Y_{p,E>0} = \frac{E_{>0}}{2.f}$  et  $X_{p,E>0} = \frac{E_{>0}}{2}$  avec l'isolement du coulisseau.

Avec  $\left\{ \begin{matrix} \bar{R}_P \\ \bar{0} \end{matrix} \right\}_P = \left\{ \begin{matrix} X_{P,E>0} \cdot \bar{x} - Y_{P,E>0} \cdot \bar{y} \\ \bar{0} \end{matrix} \right\}_P$

Si  $E < 0$  alors  $Y_{P,E<0} = -\frac{E_{<0}}{2.f}$  et  $X_{P,E<0} = \frac{E_{<0}}{2}$  avec l'isolement du coulisseau.

Avec  $\left\{ \begin{matrix} \bar{R}_P \\ \bar{0} \end{matrix} \right\}_P = \left\{ \begin{matrix} X_{P,E<0} \cdot \bar{x} - Y_{P,E<0} \cdot \bar{y} \\ \bar{0} \end{matrix} \right\}_P$

Puis avec l'isolement de la bride et du plot Pp :  $J_{E>0} = \frac{E_{>0} [r.(2.\tan \alpha - \tan \varphi) + e.(2.\tan \alpha - \tan \varphi)]}{2.f.(e + 2.r + b.\cos \alpha).(2.\cos \beta - \tan \alpha.\sin \beta)}$

Remarque : le terme  $(2.\cos \beta - \tan \alpha.\sin \beta) > 0$  pour les valeurs données à  $\alpha, \beta, \varphi$ , le dénominateur de cette expression est donc positif.

Pour  $E > 0$  ou  $E < 0$  la condition sur le dénominateur reste la même. Il faut analyser le numérateur.

- $E > 0$   $(2.r + e).\tan \alpha_{\lim} - \tan \varphi.(r + e) = 0$  soit  $\tan \alpha_{\lim,E>0} = \tan \varphi \cdot \frac{r + e}{2.r + e}$
- $E < 0$   $r.(2.\tan \alpha + \tan \varphi) + e.(2.\tan \alpha + \tan \varphi) = 0$  soit  $\tan \alpha_{\lim,E<0} = -\tan \varphi \cdot \frac{r + e}{2.r + e}$

Le résultat n'est pas remis en cause.

### Question 2.5

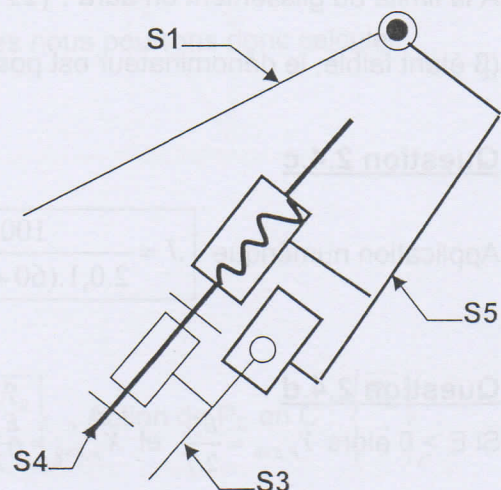
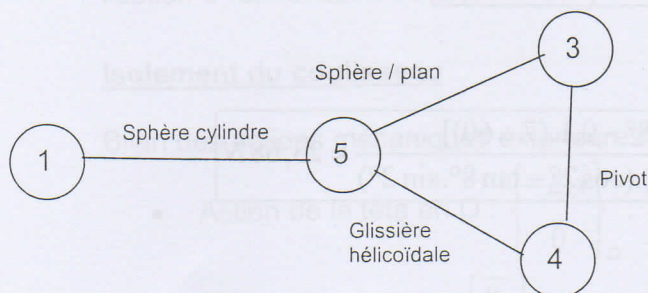
On isole le piston du vérin. Il est soumis à l'action de l'air et à l'action de la bride.  
L'équation de la résultante nous permet d'écrire en limite d'équilibre :

$$J = p \cdot \frac{\pi.d^2}{4} \Rightarrow p = \frac{4.J}{\pi.d^2} \approx 0,75.10^5 \text{ Pa}$$

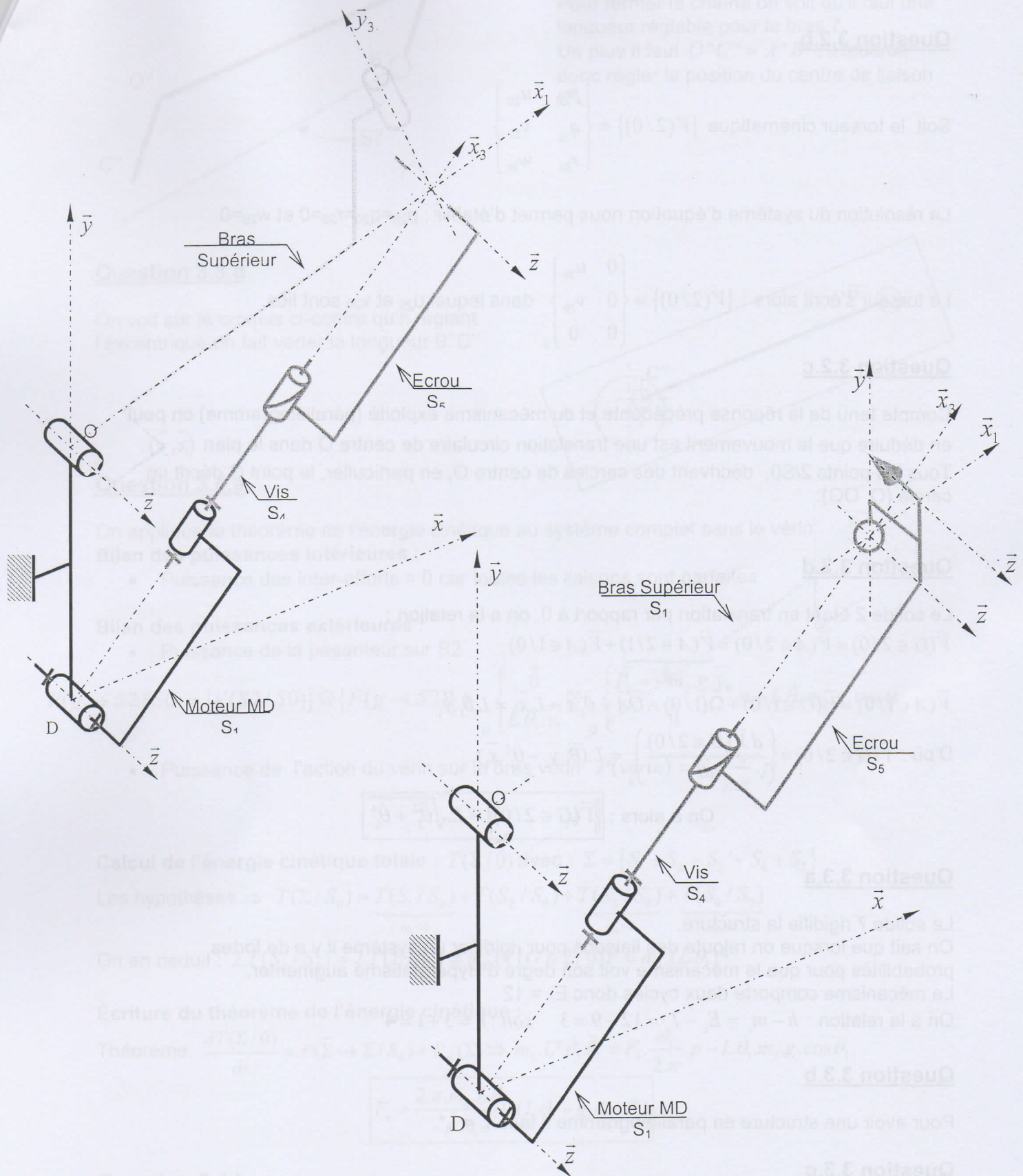
### Question 3.1

- En exploitant le schéma en perspective fourni la liaison minimale assurant la transmission du mouvement de l'écrou au bras supérieur serait une sphère cylindre, cependant il subsisterait une mobilité interne de l'écrou. Il faut donc rajouter un degré de liaison en rotation pour bloquer la rotation de l'écrou.

Il faudrait par exemple rajouter un contact ponctuel entre l'écrou et S3.







### Question 3.2.a

Nous avons un système d'équations de rang 6 avec 7 inconnues.  
La mobilité cinématique est donc égale à 1 (loi E/S)

On en déduit le degré d'Hyperstatisme :  $h = E_c - I_c + m_c = 6 - 7 + 1 = 0$

### Question 3.2.b

Soit le torseur cinématique  $\{V(2/0)\} \equiv \begin{Bmatrix} p_{20} & u_{20} \\ q_{20} & v_{20} \\ r_{20} & w_{20} \end{Bmatrix}$

La résolution du système d'équation nous permet d'établir :  $p_{20}=q_{20}=r_{20}=0$  et  $w_{20}=0$

Le torseur s'écrit alors :  $\{V(2/0)\} \equiv \begin{Bmatrix} 0 & u_{20} \\ 0 & v_{20} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_b$  dans lequel  $u_{20}$  et  $v_{20}$  sont liés.

### Question 3.2.c

Compte tenu de la réponse précédente et du mécanisme exploité (parallélogramme) on peut en déduire que le mouvement est une translation circulaire de centre O dans le plan  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Tous les points 2/S0, décrivent des cercles de centre O, en particulier, le point G décrit un cercle (O, OG).

### Question 3.2.d

Le solide 2 étant en translation par rapport à 0, on a la relation :

$$\bar{V}(G \in 2/0) = \bar{V}(A \in 2/0) = \underbrace{\bar{V}(A \in 2/1)}_0 + \bar{V}(A \in 1/0)$$

$$\bar{V}(A \in 1/0) = \bar{V}(O \in 1/0) + \bar{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{OA} = \dot{\theta}_1 \bar{z} \wedge L \bar{x}_1 = L \dot{\theta}_1 \bar{y}_1$$

$$\text{D'où : } \bar{\Gamma}(G \in 2/0) = \left( \frac{d \bar{V}(G \in 2/0)}{dt} \right)_0 = L (\ddot{\theta}_1 \bar{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 \bar{x}_1)$$

$$\text{On a alors : } \|\bar{\Gamma}(G \in 2/0)\| = L \sqrt{\ddot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1^4}$$

### Question 3.3.a

Le solide 7 rigidifie la structure.

On sait que lorsque on rajoute des liaisons pour rigidifier un système il y a de fortes probabilités pour que le mécanisme voit son degré d'Hyperstatisme augmenter.

Le mécanisme comporte deux cycles donc  $E_c = 12$

On a la relation :  $h - m_c = E_c - I_c = 12 - 9 = 3$  soit :  $h = 3 + 1 = 4$

### Question 3.3.b

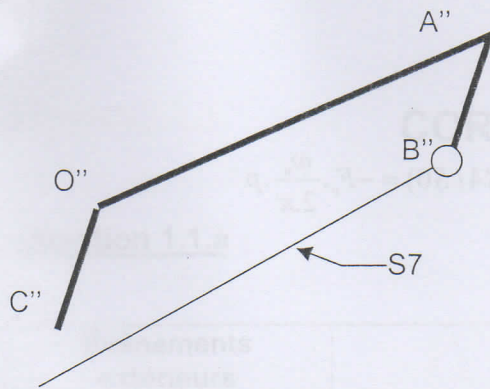
Pour avoir une structure en parallélogramme il faut  $L = L^*$ .

### Question 3.3.c

Les liaisons de 7 avec S0 et S2 doivent permettre de satisfaire la relation précédente et un assemblage en parallélogramme.

On peut envisager un bras de longueur réglable et un blocage lorsque le bon réglage est obtenu.

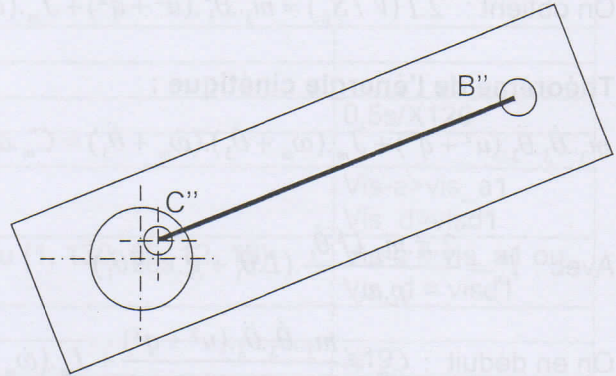




Pour fermer la chaîne on voit qu'il faut une longueur réglable pour le bras 7.  
De plus il faut  $O''C'' = A''B''$ , il faudrait donc régler la position du centre de liaison  $C''$ .

### Question 3.3.d

On voit sur le croquis ci-contre qu'en réglant l'excentrique on fait varier la longueur  $B''C''$



### Question 3.4.a

On applique le théorème de l'énergie cinétique au système complet sans le vérin

**Bilan des puissances intérieures :**

- Puissance des inter-efforts = 0 car toutes les liaisons sont parfaites

**Bilan des puissances extérieures :**

- Puissance de la pesanteur sur  $S_2$

$$P(g \rightarrow S_2 / S_0) = \{V(S_2 / S_0)\} \otimes \{F(g \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ L\dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_G \otimes \begin{Bmatrix} \vec{P}_2 = -m_2 \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = -L\dot{\theta}_1 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \theta_1$$

- Puissance de l'action du vérin sur le bras vérin  $P(\text{vérin}) = F_v \cdot \frac{\omega_v}{2\pi} \cdot p$

**Calcul de l'énergie cinétique totale :  $T(\Sigma / 0)$  avec :  $\Sigma = \{S_1 + S_2 + S_2' + S_6 + S_5\}$**

Les hypothèses  $\Rightarrow T(\Sigma / S_0) = \underbrace{T(S_1 / S_0)}_{m_1=0} + \underbrace{T(S_2 / S_0)}_{m_5=0} + \underbrace{T(S_5 / S_0)}_{m_6=0} + T(S_6 / S_0)$

On en déduit :  $2.T(S_2 / S_0) = 2.T(\Sigma / S_0) = m_2 \cdot (\vec{V}(G \in 2/0))^2 = m_2 \cdot (L\dot{\theta}_1)^2$

**Écriture du théorème de l'énergie cinétique :**

Théorème  $\frac{dT(\Sigma / 0)}{dt} = P(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma / S_0) + P_{\text{int}}(\Sigma) \Rightarrow m_2 \cdot L^2 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 = F_v \cdot \frac{\omega_v}{2\pi} \cdot p - L\dot{\theta}_1 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \theta_1$

$$F_v = \frac{2\pi \cdot m_2 \cdot L \cdot \dot{\theta}_1}{p \cdot \omega_v} \cdot (L \ddot{\theta}_1 + g \cdot \cos \theta_1)$$

### Question 3.4.b

On applique le théorème de l'énergie cinétique au vérin

**Bilan des puissances intérieures :**

- Puissance des inter-efforts = 0 car toutes les liaisons sont parfaites
- Couple électromagnétique  $P(\text{couple}) = C_m \cdot \omega_m$

### Bilan des puissances extérieures :

- Puissance de l'action du bras sur le vérin  $P(S_5 \rightarrow S_4 / S_0) = -F_v \cdot \frac{\omega_v}{2\pi} \cdot p$

### Calcul de l'énergie cinétique $T(\text{vérin} / 0)$

$$T(V / S_0) = \underbrace{T(S_4 / S_0)}_{m_4=0} + T(S_3 / S_0)$$

$$\text{On obtient : } 2.T(V / S_0) = m_3 \cdot \dot{\theta}_3^2 \cdot (u^2 + q^2) + J_m \cdot (\omega_m + \dot{\theta}_3)^2$$

### Théorème de l'énergie cinétique :

$$m_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \ddot{\theta}_3 \cdot (u^2 + q^2) + J_m \cdot (\omega_m + \dot{\theta}_3) \cdot (\dot{\omega}_m + \ddot{\theta}_3) = C_m \cdot \omega_m - F_v \cdot \frac{\omega_v}{2\pi} \cdot p$$

$$\text{Avec : } F_v = \frac{2\pi \cdot m_2 \cdot L^2 \cdot \dot{\theta}_1}{p \cdot \omega_v} \cdot (L \cdot \ddot{\theta}_1 + g \cdot \cos \theta_1)$$

$$\text{On en déduit : } C_m = \frac{m_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \ddot{\theta}_3 \cdot (u^2 + q^2)}{(\omega_m)} + J_m \cdot (\dot{\omega}_m + \ddot{\theta}_3) + \frac{m_2 \cdot L \cdot \dot{\theta}_1}{(\omega_m)} \cdot (L \cdot \ddot{\theta}_1 + g \cdot \cos \theta_1)$$

### Question 3.4.c

Par lecture des courbes, nous avons :

$$\omega_v = -5,5 \cdot \text{rad.s}^{-1} \rightarrow \omega_m = -25 \cdot -5,5 = 137,5 \cdot \text{rad.s}^{-1}$$

$$\dot{\omega}_v = -\frac{6}{0,5} = -12 \cdot \text{rad.s}^{-2} \rightarrow \dot{\omega}_m = -25 \cdot -12 = 300 \cdot \text{rad.s}^{-2}$$

Pour  $t=0,4\text{s}$  :

$$\theta_1 = -18^\circ$$

$$\theta_3 = 54^\circ$$

$$\text{d'où : } C_m = 0,2 \text{ N.m}$$

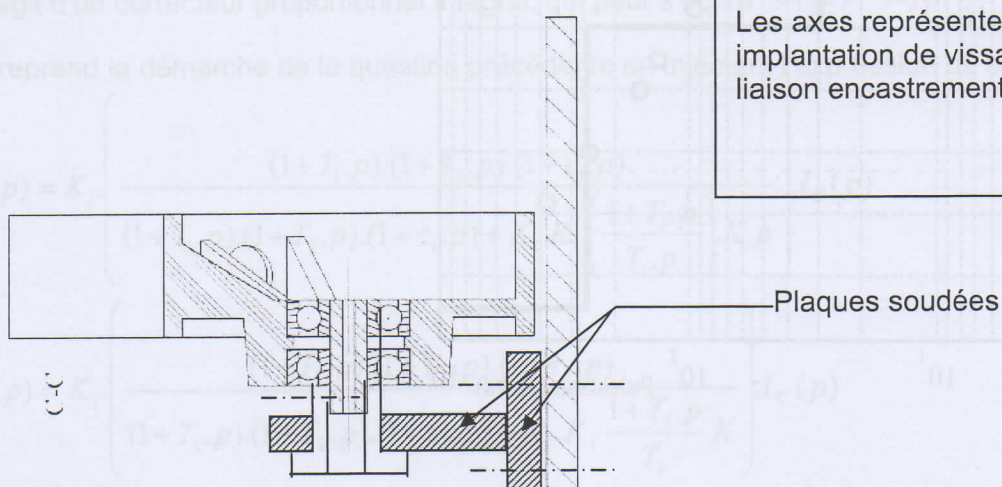
$$\dot{\theta}_1 = 1,8 \cdot 10^{-2} \cdot \text{rad.s}^{-1}$$

$$\dot{\theta}_3 = 1,21 \cdot 10^{-2} \cdot \text{rad.s}^{-1}$$

$$\ddot{\theta}_1 = 4,3 \cdot 10^{-2} \cdot \text{rad.s}^{-2}$$

$$\ddot{\theta}_3 = 2,8 \cdot 10^{-2} \cdot \text{rad.s}^{-2}$$

### Question 4.1.a et b



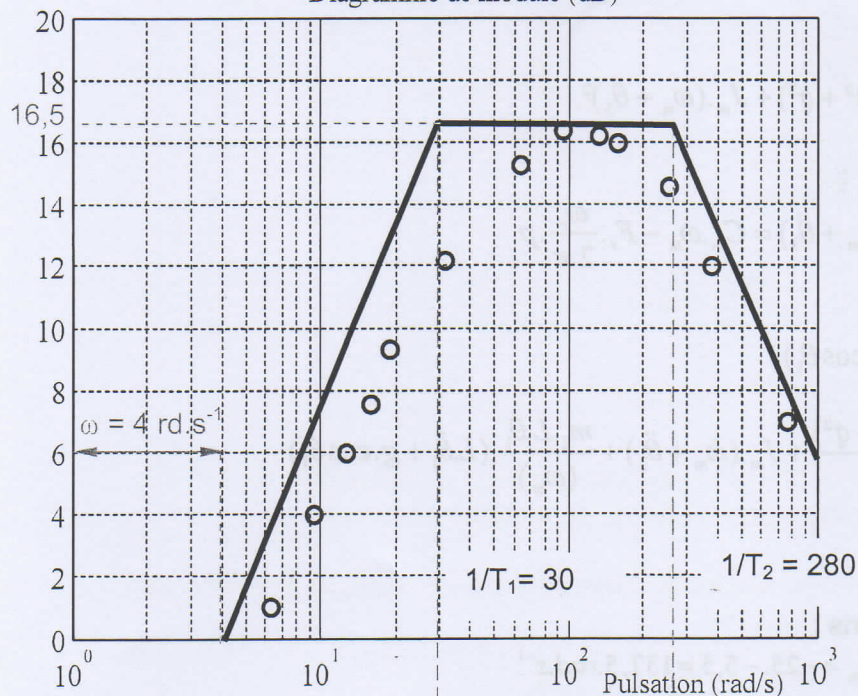
Le système de rappel sera constitué d'un ressort à spiral installé entre l'axe et la poulie. Un système à cliquet centrifuge permettra un blocage en position.



### Question 5.1.a

Relevés expérimentaux des diagrammes de Bode  
des valeurs numériques du rapport  $I(\omega)/U(\omega)$

Diagramme de module (dB)



Les asymptotes sont obtenues en déterminant les fréquences de cassure sur le diagramme des phases (+45° et -45°)

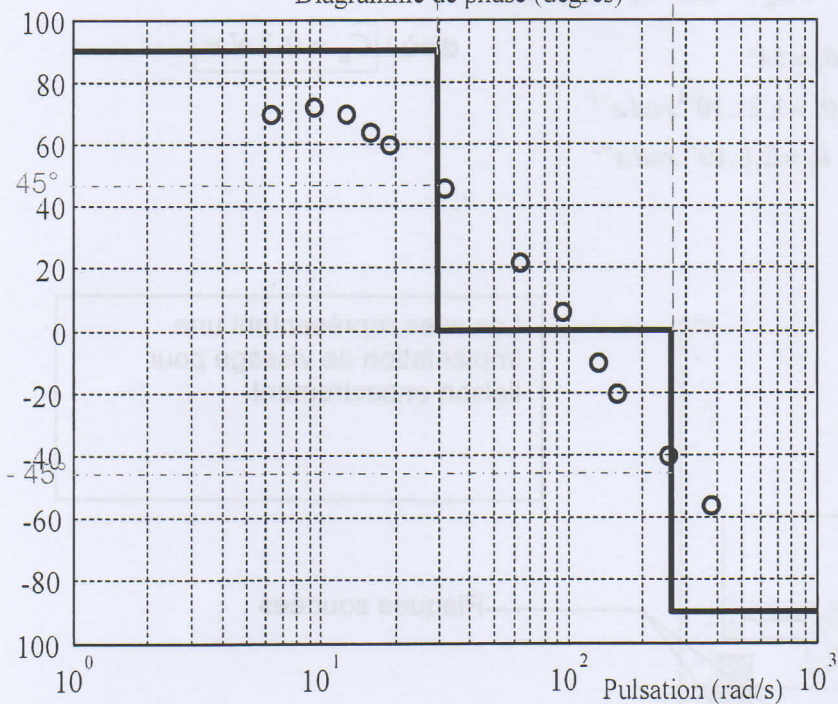
### Question 5.1.b

En utilisant le gain nul pour la pulsation  $\omega = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ , on a la relation  $\omega_0 = 1/K$

Nous obtenons un gain statique :  $K = 0,25 \text{ A.V}^{-1}.\text{s}$

Constantes de temps :  $T_1 = 1/30 \text{ s}$  et  $T_2 = 1/280 \text{ s}$

Diagramme de phase (degrés)



### Question 5.2

Le théorème du moment dynamique appliqué au système donne une relation entre  $C_m(t)$  et  $\ddot{\theta}(t)$ , or pour un moteur CC nous avons une relation de la forme  $C_m(t) = K_m \cdot i(t)$  donc commander  $i(t)$  revient à commander  $\ddot{\theta}(t)$ .

### Question 5.3.a

Nous appliquons le théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_I(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_I(p) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_I(p) = K_i \cdot I_C(p) - \frac{K_i}{1 + \tau_1 \cdot p} \cdot I(p) = K_i \cdot \left( I_C(p) - \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot p} \cdot I(p) \right)$$

Nous avons

$$\frac{I(p)}{I_C(p)} = \frac{\frac{K_i \cdot R_1(p) \cdot K \cdot p}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}}{1 + \frac{K_i \cdot R_1(p) \cdot K \cdot p}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}} = \frac{K_i \cdot R_1(p) \cdot K \cdot p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) + K_i \cdot R_1(p) \cdot K \cdot p}$$

$$\text{On en déduit : } \varepsilon_I(p) = K_i \cdot \left( 1 - \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot p} \cdot \frac{K_i \cdot R_1(p) \cdot K \cdot p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) + K_i \cdot R_1(p) \cdot K \cdot p} \right) I_C(p)$$

$$\varepsilon_I(p) = K_i \cdot \left( \frac{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) + K_i \cdot R_1(p) \cdot K \cdot p} \right) I_C(p)$$

En appliquant le théorème de la valeur finale, on obtient :

$$\text{avec } I_C(p) = \frac{I_{CO}}{p} \text{ et } R_1(p) = K_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_I(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_I(p) = K_i \cdot I_{CO}$$

Avec  $K_i = 1$  on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_I(t) = I_{CO}$  la condition n'est pas satisfaite.

### Question 5.3.b

Il s'agit d'un correcteur proportionnel intégral, qui peut s'écrire  $R_1(p) = K_1 \cdot \left( \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \right)$

On reprend la démarche de la question précédente en injectant l'expression du correcteur PI

$$\varepsilon_I(p) = K_i \cdot \left( \frac{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) + K_i \cdot K_1 \cdot \left( \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \right) \cdot K \cdot p} \right) I_C(p)$$

$$\varepsilon_I(p) = K_i \cdot \left( \frac{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) + K_i \cdot K_1 \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i} \cdot K} \right) I_C(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_I(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_I(p) = \frac{1}{1 + \frac{K_i \cdot K_1 \cdot K}{T_i}} \cdot I_{CO} \quad \text{avec } K_i = 1 \text{ V.A}^{-1}, \quad \frac{1}{1 + \frac{K_1 \cdot K}{T_i}} \leq \frac{1}{20} \Rightarrow \boxed{K_1 \geq 76 \cdot T_i}$$



### Question 5.3.c

$$K_1 \geq 0,271$$

### Question 5.3.d

$$FTBO(p) = K_1 \frac{(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p} \cdot \frac{K \cdot p}{(1+T_1 \cdot p)(1+T_2 \cdot p)} \cdot K_i \cdot \frac{1}{1+\tau_i \cdot p}$$

$$\text{Avec } T_2 = T_1 = \tau_i \Rightarrow FTBO(p) = \frac{K_1 \cdot K \cdot K_i}{T_i} \cdot \frac{1}{(1+T_1 \cdot p)(1+T_2 \cdot p)}$$

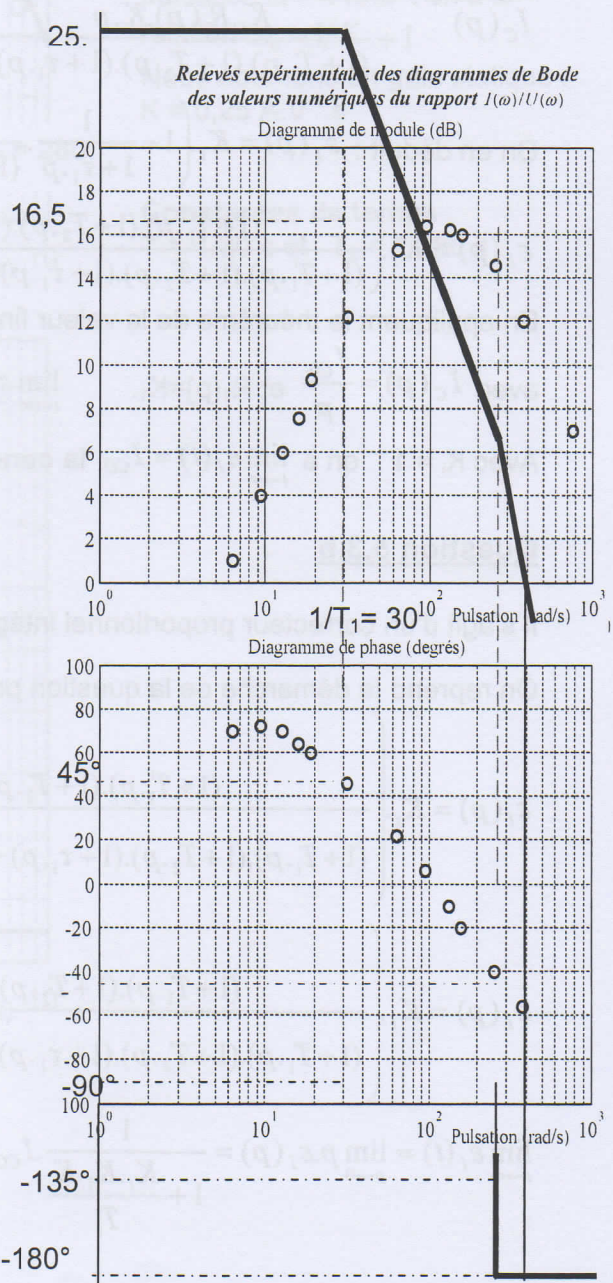
$$\frac{K_1 \cdot K \cdot K_i}{T_i} = 19 \quad T_1 = 1/30 \text{ s} \quad T_2 = 1/280 \text{ s}$$

$$FTBO(p) = K_{bo} \cdot \frac{1}{(1+T_1 \cdot p)(1+T_2 \cdot p)} \quad K_{bo} = 19 \quad T_1 = 1/30 \text{ s} \quad T_2 = 1/280 \text{ s}$$

(Voir diagramme ci-contre)

C'est une fonction de transfert du 2<sup>nd</sup> ordre, la marge de gain est infinie,  $\Delta G \rightarrow \infty$ .

La marge de phase peut être lue sur le diagramme asymptotique à  $\Delta \varphi \approx 30^\circ$ .



### Question 5.3.e

$$\frac{I(p)}{I_c(p)} = \frac{R_1(p).H(p).K_i}{1 + R_1(p).H(p).M(p).K_i} \Rightarrow T(p) = \frac{\Omega_m(p)}{I_c(p)} = \frac{R_1(p).H(p).K_i}{1 + R_1(p).H(p).M(p).K_i} \cdot K_c \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p}$$

$$T(p) = K_i K_c \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \cdot \frac{\text{chainedirecte}(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{K \cdot K_c \cdot K_1}{T_2 \cdot J_{eq}} \cdot \frac{1}{p(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + FTBO(p))}$$

En développant :

$$\frac{I(p)}{I_c(p)} = \frac{K_i \cdot R_1(p) \cdot K \cdot p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) + K_i \cdot R_1(p) \cdot K \cdot p}$$

$$\frac{I(p)}{I_c(p)} = \frac{K_i \cdot K_1 \cdot \left( \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \right) \cdot K \cdot p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) + K_i \cdot K_1 \cdot \left( \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \right) \cdot K \cdot p}$$

$$\frac{I(p)}{I_c(p)} = \frac{K_i \cdot K_1 \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i} \cdot K \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) + K_i \cdot K_1 \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i} \cdot K} =$$

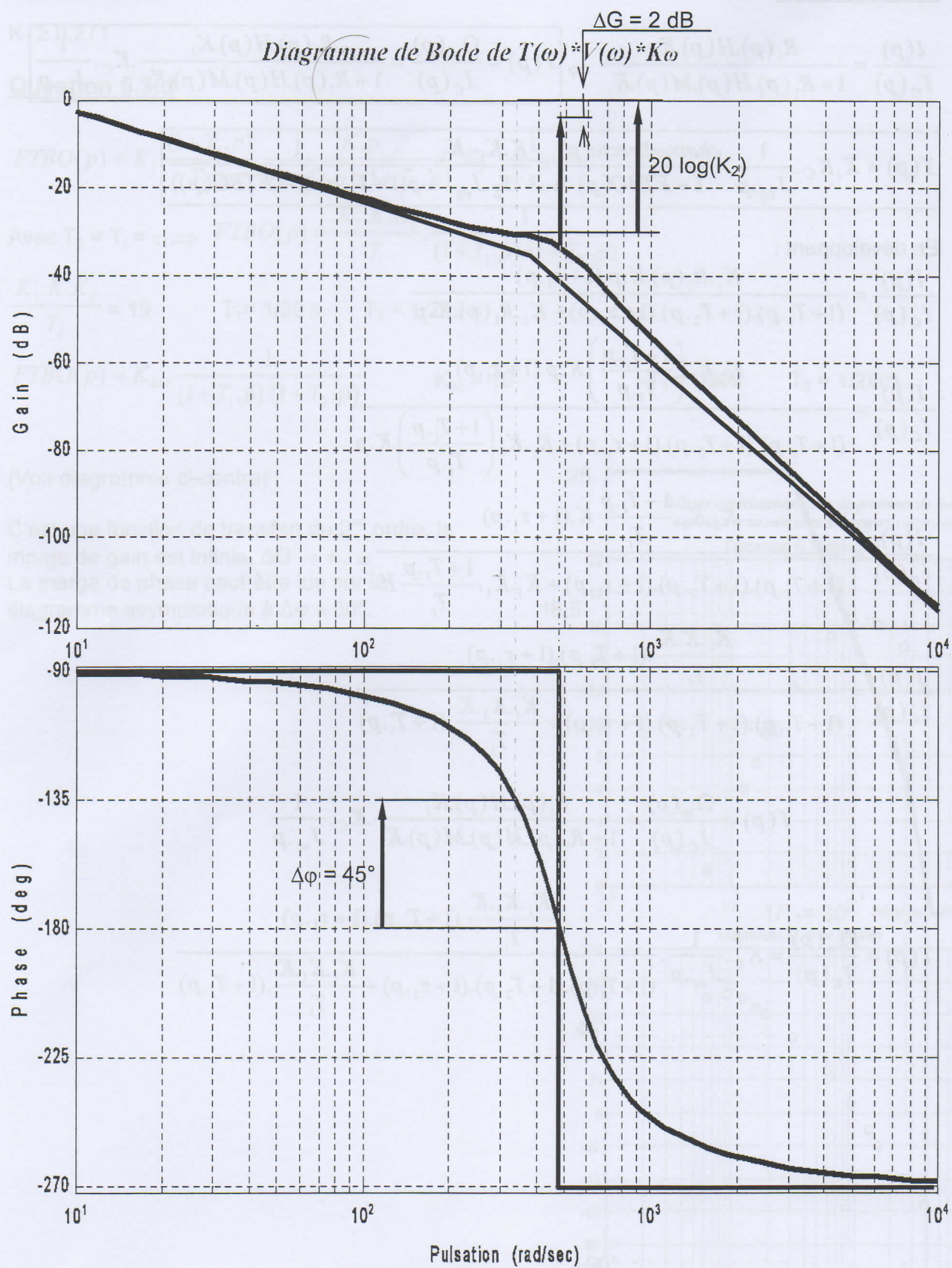
$$\frac{I(p)}{I_c(p)} = \frac{\frac{K_i \cdot K \cdot K}{T_i} \cdot (1 + T_i \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) + \frac{K_i \cdot K_1 \cdot K}{T_i} \cdot (1 + T_i \cdot p)}$$

$$T(p) = \frac{\Omega_m(p)}{I_c(p)} = \frac{R_1(p).H(p).K_i}{1 + R_1(p).H(p).M(p).K_i} \cdot K_c \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p}$$

$$T(p) = \frac{\Omega_m(p)}{I_c(p)} = K_c \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \cdot \frac{\frac{K_i \cdot K_1 \cdot K}{T_i} \cdot (1 + T_i \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) + \frac{K_i \cdot K_1 \cdot K}{T_i} \cdot (1 + T_i \cdot p)}$$



# Question 5.4.a



$$T(p).V(p).K_{\omega} = K_2.K_C \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \cdot \frac{\frac{K_i.K_1.K}{T_i} \cdot (1+T_i \cdot p) \cdot (1+\tau_1 \cdot p)}{(1+T_1 \cdot p) \cdot (1+T_2 \cdot p) \cdot (1+\tau_1 \cdot p) + \frac{K_i.K_1.K}{T_i} \cdot (1+T_i \cdot p)} \cdot \frac{K_{\omega}}{1+\tau_2 \cdot p}$$

Avec  $T_1 = \tau_1 = \tau_2 = T_2$

$$T(p).V(p).K_{\omega} = \frac{\frac{K_2.K_C.K_{\omega}.K_i.K_1.K}{J_{eq} \cdot T_i}}{p \cdot \left( (1+T_1 \cdot p) \cdot (1+T_2 \cdot p) + \frac{K_i.K_1.K}{T_i} \right)}$$

$$T(p).K_{\omega} \cdot \frac{1}{1+\tau_2 \cdot p} = \frac{K.K_C.K_1.K_2.K_{\omega}}{T_2.J_{eq}} \cdot \frac{1}{p \left( \frac{K.K_1.K_i}{T_2} + (1+T_1 \cdot p) \cdot (1+T_2 \cdot p) \right)}$$

#### Question 5.4.b

Graphiquement on détermine la fréquence pour laquelle la marge de phase est de  $45^\circ$ .

On en déduit la valeur en dB  $20 \cdot \log K_2 = 30,48 \text{ dB} \Rightarrow K_2 = 33,44$

De manière graphique, on obtient une marge de gain de 2 dB environ, le système en boucle fermée n'aura pas une bonne stabilité.