



**CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE**

**Epreuve de Sciences Industrielles PSI**

**durée 5 heures**

---

**L'utilisation de la calculatrice est autorisée**

**MACHINE DE DÉCOUPE DE MIROIRS DE RÉTROVISEURS  
DE CAMION**

**DOSSIERS REMIS AUX CANDIDATS**

**Présentation générale :** page 2 à 4

**Partie 1 :** Analyse de la fonction FT 2 « Rainurer un profil sur la calotte » page 4 à 5

**Partie 2 :** Vérification des performances page 5 à 10

**Partie 3 :** Amélioration des performances page 11

**Annexes :** pages I à XVIII

**Documents réponses :** pages i à ii

**Nota :**

- Les calculatrices sont autorisées.
- Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.
- *Le candidat est appelé à fournir toute hypothèse supplémentaire qu'il jugera nécessaire à la résolution du sujet.*

Placer impérativement chaque partie dans une copie séparée et regrouper le tout dans une copie vierge.

## PRÉSENTATION GÉNÉRALE

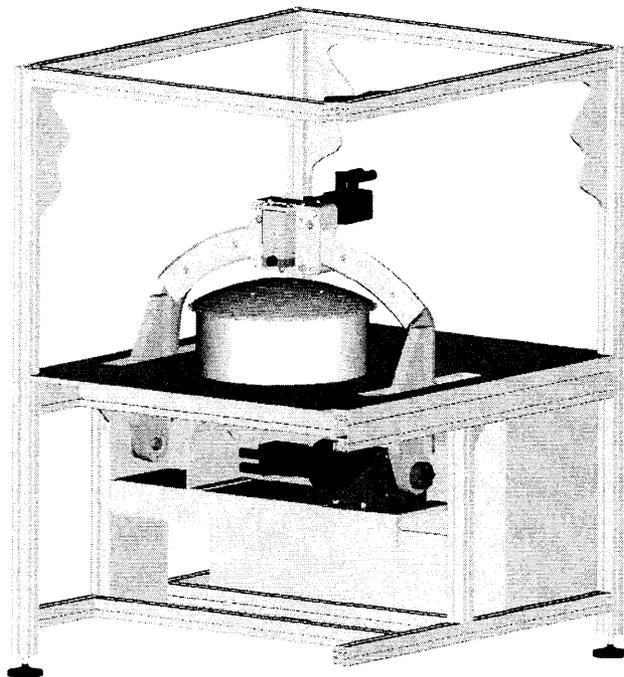


FIG. 1 – Machine de découpe de miroirs sphériques

### Présentation de l'entreprise et du produit

La société R & D Ingénierie basée près de Saverne en Alsace est un bureau d'études et de réalisations de machines spéciales. La machine dédiée à la découpe de miroirs sphériques étudiée dans ce sujet (voir Fig 1) est un exemple d'un système développé par cette société pour une entreprise de sous-traitance. Cette dernière n'effectue que la découpe des miroirs de rétroviseurs qu'elle vend au fournisseur des rétroviseurs finis.

La particularité de ces rétroviseurs, outre leurs grandes dimensions, réside dans leur forme bombée en portion de sphère qui permet d'agrandir le champ de vision du conducteur. Les formes du contour à découper ainsi qu'une vue en coupe visualisant le bombé sphérique ( rayon constant ) sont présentées en Annexe A p. I. La découpe de ces miroirs se fait en deux temps à partir d'un miroir en calotte sphérique ( appelé par la suite calotte sphérique ). Il faut d'abord faire rouler sans glisser une molette en acier tout en appliquant un effort presseur afin d'entailler le profil souhaité dans la glace, puis, lorsque le contour a été entièrement parcouru, un opérateur expérimenté doit détacher le miroir découpé de la calotte sphérique à l'aide d'un marteau spécial.

## Présentation de l'étude

### Contraintes de découpage extraites du cahier des charges fonctionnelles du système

Pour que l'entaille soit de bonne qualité il est indispensable de respecter les trois contraintes suivantes (voir l'Annexe B p. II pour une mise en situation de la molette en cours de découpage sur la sphère) :

**Contrainte 1** : le plan de symétrie orthogonal à l'axe de révolution de la molette (nommé dans la suite de l'étude « plan de la molette ») doit être orthogonal au plan tangent au point de contact de la calotte sphérique à entailler.

**Contrainte 2** : ce plan doit être orientable de manière à rester tangent au profil à découper.

**Contrainte 3** : l'effort normal de contact de l'outil de découpe sur le miroir doit être constant et égal à 100 N.

### Hypothèse de modélisation du contact molette/miroir

Dans toute l'étude, la découpe qui suppose en réalité une entaille, sera modélisée en considérant un contact indéformable avec frottements. Ainsi, on supposera que la molette roule sans glisser sur la surface de la calotte sphérique.

### Définitions des bases des repères de l'étude

Dans la suite de l'étude, les bases orthonormales directes des repères liés à certains sous-ensembles sont définies comme suit (voir Annexe C p. III) :

- $B_0 = \{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$  est la base du repère ( origine  $O$ , centre de la calotte sphérique ) lié au bâti de la machine (cf. Annexe D p. IV) telle que :
  - $\vec{x}_0$  a pour direction l'axe du motoréducteur  $M1X$  ;
  - $\vec{z}_0$  est dirigé selon l'axe vertical ascendant ;
  - $\vec{y}_0$  est le vecteur complémentaire.
- $B_1 = \{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\}$  est la base du repère lié au berceau se déduisant de  $B_0$  par une rotation d'angle  $\psi$  autour de  $\vec{x}_0$
- $B_2 = \{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2\}$  est la base du repère lié au chariot se déduisant de  $B_1$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{y}_1$
- $B_3 = \{\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3\}$  est la base du repère lié au porte-molette se déduisant de  $B_2$  par une rotation d'angle  $\beta$  autour de  $\vec{z}_2$
- $B_4 = \{\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4\}$  est la base du repère lié au point de contact molette/miroir qui se déplace le long de la courbe gauche réellement découpée sur la calotte sphérique (voir l'Annexe B p. II) :
  - $\vec{x}_4$  est le vecteur tangent à la courbe découpée
  - $\vec{z}_4$  est le vecteur normal au plan tangent à la sphère au point de contact
  - $\vec{y}_4$  est le vecteur complémentaire, sa direction est celle de l'axe de la molette.

### Description du principe de définition des profils

Pour des raisons qui seront étudiées dans le sujet, le profil découpé sur la calotte sphérique est réalisé en asservissant les positions des axes des deux moteurs  $M1X$  et  $M2Y$ . Les consignes calculées et transmises aux asservissements des moteurs correspondent aux angles théoriques tels que le point d'intersection de l'axe du porte-molette ( voir la Fig. 3 Annexe E p. VI ) avec la

calotte sphérique suit le profil ( nommé dans la suite «profil projeté») obtenu par projection selon  $\vec{z}_0$  sur cette dernière d'un profil défini dans le plan  $O\vec{x}_0\vec{y}_0$  ( ce dernier sera nommé «profil de référence» dans la présente étude ). Enfin, en raison des imprécisions de réalisation inévitables, le profil réellement découpé diffère du profil projeté ( Le contrôle dimensionnel s'effectue sur les écarts entre la projection selon  $\vec{z}_0$  dans le plan  $O\vec{x}_0\vec{y}_0$  du profil réel et du profil de référence ).

## Description fonctionnelle du système

La fonction de service du système étudié appelée FS1 : « découper des miroirs sur une calotte sphérique » est détaillée sur le diagramme FAST de l'Annexe F p. VII. Sur ce diagramme sont présentées les quatre fonctions techniques principales du système étudié. Seule la fonction technique FT2 : « Rainurer un profil sur la calotte », objet de l'étude, est détaillée jusqu'aux solutions techniques. Cette description servira par la suite de fil conducteur au questionnaire.

## Description de l'architecture des principales liaisons de la partie opérative

L'architecture des liaisons retenues pour respecter la Contrainte 1 décrite précédemment sont représentées par un dessin en perspective en Annexe D p. IV sur lequel, par souci de clarté, un poteau vertical ainsi que certaines tôles de protection ont été supprimés. Les deux principaux mouvements de la machine sont réalisés par les deux ensembles notés *Berceau* et *Chariot*. Le berceau, constitué de deux montants et du cintre en liaisons complètes, est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $O\vec{x}_0$ . Ce mouvement est actionné par le motoréducteur noté *M1X*. Le chariot, motorisé par le motoréducteur *M2Y*, est animé d'un mouvement de rotation grâce à la forme particulière du cintre. L'annexe E p. V et la page suivante permettent de visualiser les solutions constructives utilisées pour la fonction guidage du chariot. La fonction entraînement du chariot est obtenue par engrenement de la pièce « *pignon* » sur la pièce « *secteur denté* » solidaire du cintre.

# 1 Analyse de la fonction FT 2 : « Rainurer un profil sur la calotte »

Le choix de l'architecture de la machine adoptée par les concepteurs permet de prendre en compte naturellement la spécificité géométrique de la surface sur laquelle le miroir est découpé, ainsi que les contraintes déjà énoncées pour une découpe correcte. Dans cette partie, on demande d'analyser la particularité de cette architecture et à quelles conditions les trois contraintes de découpage sont respectées.

## 1.1 Analyse de la fonction FT 2.1 : « Respecter la Contrainte 1 »

Le déplacement de l'outil à la surface de la sphère nécessite la réalisation d'une cinématique particulière, objet de cette partie de l'étude. L'objectif est d'analyser les conditions de bon fonctionnement de cette solution.

**Question 1.1.1** A partir des définitions des bases exposées dans la section précédente, compléter sur le document réponse 1 p. i les noms des axes des repères et les angles de rotation correspondants.

**Question 1.1.2** Quelle solution constructive a été adoptée pour matérialiser la liaison pivot entre le chariot et le berceau ? ( Répondre en donnant les noms des pièces permettant de réaliser cette fonction )

**Question 1.1.3** Quelles sont les conditions géométriques concernant le cintre pour que cette liaison réelle restitue la liaison pivot correspondante sur le schéma cinématique ?

## 1.2 Analyse de la FT 2.2 : « Respecter la contrainte 2 »

Pour respecter la condition de tangence de la molette au profil il faut réaliser la rotation du porte-outil autour de  $\vec{z}_2$  (FT 2.2.1 du diagramme FAST Annexe F p. VII). L'objectif est ici d'expliquer qualitativement la solution retenue par les concepteurs.

**Question 1.2.1** Expliquer sans calcul et en se basant sur le diagramme FAST comment est réalisée la mise en rotation du porte- molette nécessaire à l'orientation de la molette le long de la trajectoire.

**Question 1.2.2** Quel(s) avantage(s) et/ou inconvénient(s) présente(nt) cette solution ?

## 1.3 Analyse de la FT 2.3 : « Respecter la contrainte 3 »

Compte tenu des tolérances de fabrication des différentes pièces de la machine et du miroir, la trajectoire d'un point appartenant au chariot décrit une sphère dont le centre n'est pas exactement confondu avec celui du centre de la calotte sphérique à découper. Il en résulte que si le centre de la molette est à une distance fixe par rapport à un point du chariot, le contact molette/miroir sera dépendant des défauts de réalisation et donc la Contrainte 3 ne serait pas respectée.

**Question 1.3.1** Expliquer pourquoi un vérin a été utilisé pour résoudre ce problème.

**Question 1.3.2** Quelle est la grandeur physique qui doit être régulée sur ce vérin ?

**Question 1.3.3** Dédurre de l'ensemble de l'analyse de la fonction FT 2, le nombre minimum de paramètres géométriques à asservir sur cette machine et préciser quels sont les actionneurs qui leur sont associés.

**Question 1.3.4** Si une solution de type « 3 axes » cartésiens était envisagée, quelle(s) contrainte(s) de découpage n'aurai(en)t pu être respectée(s) ? Proposer une solution pour que la contrainte 3 puisse être respectée.

## 2 Vérification des performances

Les performances d'un système sont étroitement liées aux actionneurs, à la précision des capteurs et des différentes liaisons mécaniques, et à la commande. Dans cette partie, une analyse simplifiée de certains de ces points permettra d'évaluer la pertinence des solutions retenues.

## 2.1 Définition de la motorisation de l'axe M1X

La motorisation M1X doit actionner le déplacement de l'ensemble *berceau* et *chariot* ( noté  $E$  ) représentant une inertie et une masse excentrée importante. Les éléments d'inertie utiles sont donnés ci-dessous pour  $\theta = 0$  :

- Masse de l'ensemble berceau et chariot :  $M_E = 30 \text{ kg}$  ;
- Matrice principale d'inertie de  $E$  dans le repère  $\{G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\}$  ( exprimée en  $\text{kg.m}^2$  ) :

$$[I(E)]_{\{G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\}} = \begin{pmatrix} 1,22 & 0 & 0 \\ 0 & 2,94 & 0 \\ 0 & 0 & 1,89 \end{pmatrix}$$

- Position ( en mètres ) du centre d'inertie dans le repère  $R_0 = \{0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$  pour la position  $\psi = 0$  et  $\theta = 0$  ( repère représenté sur l'Annexe D ) :

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,36 \end{pmatrix}$$

On se propose de déterminer la motorisation selon des critères liés à la découpe des miroirs et de vérifier qu'elle est effectivement en mesure d'assurer les performances attendues.

**Question 2.1.1** Le cahier des charges impose lors des phases de découpage de pouvoir fournir un effort tangentiel à la calotte sphérique de rayon  $R_s = 0,425 \text{ m}$  au point  $C$  de  $340 \text{ N}$  sur l'outil lors d'une phase où le berceau monte, la vitesse de déplacement maximum de l'outil étant de  $1 \text{ m.s}^{-1}$  dans cette phase. En supposant que le régime permanent est atteint, définir un moteur convenant à ces contraintes à partir de la documentation technique de l'Annexe H p. IX. On se basera sur les zones de fonctionnement continu notées « S-1 » sur les diagrammes vitesse-couple. Le rapport de réduction du motoréducteur M1X est de  $r = 1/160^{\text{ème}}$  son rendement  $\eta = 0,7$ , la plage de variation de l'angle  $\psi$  est comprise entre  $-30^\circ$  et  $30^\circ$ .

**Question 2.1.2** Les phases de chargement/déchargement supposent que le berceau soit dégagé c'est à dire ramené en position basse extrême  $\psi = -30^\circ$ . Avant de démarrer le découpage le berceau doit être repositionné rapidement et initialisé ( voir le grafctet Annexe G p. VIII ) en  $\psi = 0$  et  $\theta = 0$ . Le profil de vitesse type pour cette opération est représenté sur le document réponse 2, p. ii. Il s'agit d'un profil trapézoïdal symétrique où les durées d'accélération  $\Delta T_a$  et de décélération  $\Delta T_d$  sont égales. Entre ces deux phases la vitesse est maintenue constante à une vitesse  $\dot{\psi}_{max} = 1 \text{ rad/s}$ . La durée du cycle est notée  $T_2$ .

On modélise le système représenté sur la figure 5 de l'Annexe I p. X constitué par l'ensemble *berceau* et *chariot* motorisé par l'axe *M1X*, en considérant le système équivalent de la figure 6 sur la même annexe. Le *chariot* étant supposé immobile, le système peut être représenté par un cylindre d'inertie  $I_{xx}$  ( moment principal d'inertie autour de  $\vec{x}_0$  ) et un balourd modélisé par une masse concentrée  $M$ . Le rapport de réduction est de  $r = 1 : 160^{\text{ème}}$ .

- Donner les expressions des éléments d'inertie de  $E$  et du modèle en  $O$  dans la base  $\{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\}$ .
- Préciser les valeurs à donner à  $M$ ,  $I_{xx}$  et  $d$  pour que le modèle soit équivalent à  $E$  à la fois pour les effets inertiels et le balourd autour de  $O, \vec{x}_0$ .

**Question 2.1.3** En plus des éléments d'inertie précédemment étudiés, on complète le modèle en introduisant les frottements dans le réducteur. Pour une vitesse de rotation suffisante, ceux-ci sont modélisés de façon satisfaisante par un couple de frottement proportionnel ( coefficient de proportionnalité note  $f$  ) à la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée du réducteur ( côté moteur ). On posera  $J_{xx}$  l'inertie totale ramenée sur l'axe du moteur en précisant son expression et en notant  $I_{mot}$  l'inertie en rotation du rotor du moteur autour de son axe. Etablir alors l'expression du couple du moteur  $C_{em}$  en fonction de  $\ddot{\psi}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\psi$ ,  $J_{xx}$ ,  $M_E$ ,  $g$ ,  $d$ ,  $\eta$ ,  $f$ , et  $r$ .

**Question 2.1.4** En vous basant sur l'expression obtenue précédemment, et le profil de vitesse imposé ( document réponse 2 p. ii ), déduire les chronogrammes :

- du couple d'inertie défini par  $C_I(t) = J_{xx}\ddot{\psi}(t)$  ;
- du couple dû au balourd en G noté  $C_B(t)$  ;
- du couple de frottement

On représentera ces allures sur les axes prévus dans le même document réponse.

On prendra le coefficient  $f=1.10^{-3}$  U.S.I pour les applications numériques

**Question 2.1.5** En déduire le chronogramme du couple moteur  $C_{em}(t)$  délivré pour réaliser le profil ( même document réponse ). Le choix initial de la motorisation ( question 2.1.1 ) est-il remis en cause ?

## 2.2 Etude de la cadence

L'objet de cette partie est de déterminer le temps de production d'un miroir qui dépend en particulier de la durée de découpage. Le profil du miroir est spécifié à partir du profil de référence ( cf. Annexe A p. I ). Dans cette partie, par souci de simplification, on considère un profil de référence rectangulaire ( Annexe K p. XI ) dont la longueur totale est adaptée pour tenir compte des variations de vitesse de déplacement de l'outil. Le profil de référence est toujours centré sur l'origine  $O$  du repère lié au bâti.

**Question 2.2.1** Exprimer la longueur totale du profil projeté en fonction des longueurs  $L_A$  et  $L_B$  du profil de référence rectangulaire. On prendra  $R_s=425$  mm,  $L_A=200$  mm et  $L_B=425$  mm pour l'application numérique.

**Question 2.2.2** En réalité, pour des problèmes liés à l'asservissement de la découpe dans la partie à faible rayon de courbure du profil projeté réel ( non rectangulaire ), il est nécessaire de réduire la vitesse de déplacement. Ainsi, la vitesse moyenne minimale de découpe calculée sur ce profil projeté réel est de  $0,1$  m.s<sup>-1</sup>. En déduire le temps  $T_8$  de coupe pour le profil rectangulaire proposé en considérant cette vitesse moyenne.

**Question 2.2.3** À partir du grafctet de l'Annexe G, des données du tableau 1 p. 8 comprenant également les données liées aux manipulations de l'opérateur ( la durée de la macro-étape 8 est  $T_8$  résultat de la question précédente ). Calculer le temps de production d'un miroir.

## 2.3 Etude de la précision

Le miroir étant assemblé sur un support dont les bords suivent le profil de référence, les tolérances à respecter doivent être définies sur ce même profil. La motorisation et leurs capteurs utilisent pour paramètres les angles  $(\psi, \theta)$  (Annexe C p. III). Ainsi, les principales sources d'erreurs angulaires sont les jeux de la transmission et l'imprécision des capteurs d'une part

Étapes Grafcet		
Macroétape	Désignation	Durée (s)
1	Bridage miroir	$T_1$ négligeable
2	Initialisation M1X	$T_2=2$
3	initialisation M2Y	$T_3=1,5$
7	Positionnement outil à l'origine du profil	$T_7=1$
8	Découpe	$T_8$
9	Dégagement de la molette	$T_9$ négligeable
10	Débridage miroir	$T_{10}$ négligeable
11	Dégagement berceau	$T_{11}= 2$
12	Dégagement chariot	$T_{12}= 1,5$
Manipulations Opérateur		
Désignation	Durée moyenne (s)	
Chargement de la calotte	5	
Déchargement de la calotte	5	
Dégagement du miroir et stockage	5	
Mise au rebut de la calotte découpée	2	

TAB. 1 – Durée des macroétapes

et l'excentration de la molette par rapport au porte-molette d'autre part. On cherche donc, à partir de ces caractéristiques, à déterminer un majorant de l'erreur sur le profil dans le plan  $\{0, \vec{x}_0, \vec{y}_0\}$  afin de vérifier que la précision imposée par le cahier des charges (tolérance de  $\pm 0,5$  mm sur les dimensions du profil de référence) est effectivement respectée.

**Question 2.3.1** Exprimer les relations entre les coordonnées d'un point  $M(x_m, y_m)$  du profil de référence défini dans le plan  $\{0, \vec{x}_0, \vec{y}_0\}$  projeté en  $C$  suivant  $\vec{z}_0$  sur la surface du miroir en fonction de  $R_s$  (rayon du miroir),  $\psi$ , et  $\theta$ . On pourra, si nécessaire, s'aider de la figure en annexe L p. XII.

**Question 2.3.2** A partir des relations établies dans la question précédente et des données ci-dessous, déterminer l'erreur maximale sur chacun des deux axes M1X et M2Y due aux jeux des transmissions et aux imprécisions des capteurs angulaires. On supposera pour simplifier que pour estimer l'erreur induite par l'incertitude sur l'angle  $\psi$ , l'angle  $\theta$  est parfaitement positionné ( l'erreur sur cet angle intervenant au second ordre ).

Données :

**Axe M1X** : – jeu angulaire en sortie de réducteur : 1 minute d'angle

- Codeur incrémental sur arbre moteur : 1024 points par tour
- Réducteur de vitesse de rapport 1/160 entre le moteur et le berceau

**Axe M2Y** : – jeu angulaire en sortie de réducteur : 20 minutes d'angle

- Codeur incrémental sur arbre moteur : 1024 points par tour
- Réducteur de vitesse de rapport 1/10 entre le moteur et le pignon denté
- Rayon du pignon denté : 30 mm (défini en Annexe E)
- Rayon de la roue dentée : 540 mm (défini dans la même Annexe)
- Un mécanisme (non représenté sur les figures) permet de supprimer le jeu dans l'engrènement entre le pignon et la roue dentée cités ci-dessus.

Le tableau 2 donnant l'ensemble des dimensions maximales en millimètres ( longueur  $L_A$  et largeur  $L_B$  ) des profils susceptibles d'être découpés sur cette machine (Rayon de la sphère  $R_s = 425$  mm).

Référence	$L_A$ (mm)	$L_B$ (mm)
1	147,6	157,5
2	425	199,8
3	270,3	160,3
4	177,0	159,0
5	257,0	157,5

TAB. 2 – Dimensions des miroirs

Le questionnaire suivant pourra servir de guide :

Que penser de la résolution des codeurs par rapport aux erreurs engendrées par les jeux des transmissions ?

Déterminer les valeurs extrêmes des deux angles de commande à l'aide du tableau 2.

Calculer l'erreur maximale sur la dimension suivant  $\vec{x}_0$ .

Calculer ensuite l'erreur maximale sur la dimension suivant  $\vec{y}_0$

**Question 2.3.3** Compte tenu de l'étude précédente, proposer une amélioration permettant d'augmenter la précision du profil découpé sans aucune modification sur les composants de la machine.

**Question 2.3.4** La Fig. 7 de l'Annexe M p. XIII représente le schéma cinématique des liaisons entre le porte-molette, la molette, le miroir et le coulisseau (les liaisons sont supposées parfaites). L'objectif global de cette question est de déterminer l'influence de l'excentration de la molette sur la précision de la découpe. Afin de pouvoir atteindre cet objectif tout en faisant appel à des calculs analytiques il est nécessaire de faire les quelques hypothèses simplificatrices énoncées ci-dessous. Bien que ces hypothèses ne puissent pas être respectées par la géométrie de la machine étudiée, elles permettront, grâce aux résultats analytiques ainsi obtenus, d'en déduire une vision qualitative des causes d'imprécision de cette machine.

Hypothèses de l'étude :

- Le miroir à découper est supposé plan.
- Les points  $H$  et  $C$  de la Fig. 7 se trouvent dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .
- Le mouvement du coulisseau est supposé être de translation circulaire, c'est-à-dire que la trajectoire du point  $H$  est le cercle de rayon  $R_{ref}$  centré en  $O$  et que le vecteur  $\vec{x}_2$  reste colinéaire à  $\vec{x}_0$  ( la base  $B_2$  est liée au coulisseau ). Le vecteur  $\vec{x}_3$  ( lié au porte molette ) fait un angle  $\gamma$  avec le vecteur  $\vec{u}$  ( tangent à la trajectoire du point  $H$  ). Cet angle  $\gamma$  est représenté dans une position quelconque sur la Fig. 7.
- Le mouvement est en régime permanent avec une vitesse de rotation  $\dot{\nu} = c^{te}$  et on peut donc considérer ici que  $\gamma$  reste constant.
- Il y a roulement sans glissement au point  $C$  entre la molette et le miroir.

On note  $R_m$  le rayon de la molette et  $\vec{\Omega}_{m/pm}$  le vecteur vitesse de rotation de la molette par rapport au porte molette. On note  $V = R_{ref}\dot{\nu}$ .

On demande de déterminer la valeur de l'angle  $\gamma$  par un raisonnement cinématique afin d'en déduire la trajectoire du point  $C$  et ainsi l'erreur sur le profil découpé. Pour cela le questionnaire

guide suivant pourra être utilisé :

- Exprimer la décomposition de  $\vec{V}_{H,Coul/mir}$  afin de faire apparaître notamment  $\vec{V}_{C,mol/mir}$ .  
En déduire l'expression du produit scalaire  $\vec{V}_{C,mol/mir} \cdot \vec{y}_3$  en fonction de  $V$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $\beta$ .
- Ecrire la condition de roulement sans glissement au point  $C$  entre la molette et le miroir en projection sur le vecteur  $\vec{y}_3$ .
- Montrer que  $\dot{\beta} + \dot{\gamma} = \frac{V}{R_{ref}}$ .
- En déduire l'équation différentielle qui détermine l'angle  $\gamma$ .
- Résoudre cette équation pour le régime permanent ( $\dot{\gamma} = 0$ ).
- En déduire l'expression de  $\gamma$  en fonction de  $\delta$  et  $R_{ref}$ .

**Question 2.3.5** Tracer sur votre copie une figure identique à la Fig. 7 avec l'angle  $\gamma$  correspondant à l'expression trouvée à la question précédente et tracer une portion de la trajectoire du point  $C$  ( dont on précisera la nature ) au voisinage de la configuration adoptée. En déduire le rayon de la trajectoire du point  $C$  noté  $R_{reel}$ . Faire l'application numérique donnant l'erreur maximale entre le profil de référence (cercle de rayon  $R_{ref}$ ) et le profil réellement découpé dans ces conditions sachant que  $\delta = 1,5$  mm et  $R_{ref_{mini}} = 5$  mm.

**Question 2.3.6** En admettant que le résultat précédent constitue un majorant de l'erreur réelle intervenant lors du découpage du profil sur une sphère, vérifier que la tolérance de  $\pm 0,5$  mm spécifiée dans le cahier des charges sur les dimensions du profil de référence est respectée (on tiendra compte des erreurs liées au jeux).

**Question 2.3.7** Le calcul de l'angle  $\gamma$  dans les questions précédentes a été fait en régime permanent. En réalité les profils de référence des rétroviseurs n'étant pas circulaires, il faut s'intéresser au régime transitoire ( $\dot{\gamma}$  non nul) afin d'estimer l'erreur sur le profil due à l'excentration de la molette. Résoudre l'équation différentielle trouvée question 2.3.4 (expression générale de la solution sans tenir compte des conditions initiales) en considérant que l'angle  $\gamma$  est petit, c'est-à-dire que l'on peut linéariser les fonctions trigonométriques en  $\gamma$ . Commenter ce résultat en expliquant qualitativement l'influence de certains paramètres sur la précision de la découpe.

## 2.4 Etude de l'asservissement de l'axe M1X

La découpe des miroirs étant définie par un profil, on réalise un asservissement en position. La commande de l'axe M1X en particulier pose un certain nombre de problèmes liés à la géométrie adoptée. Dans cette analyse, on supposera que seul cet axe est commandé ce qui correspond par exemple à la réalisation d'une arête du profil parallèle à l'axe  $\vec{y}_0$ .

La motorisation est réalisée par des moteurs « brushless » ayant de meilleures performances que les moteurs à courant continu en terme de compacité et de dynamique tout en ayant une commande similaire.

**Question 2.4.1** Le moteur brushless est alimenté par un système de tensions triphasées d'amplitude et de fréquence variables délivrées par un variateur. Cependant on peut se ramener à un modèle proche de celui du moteur à courant continu à condition de considérer la valeur efficace de la tension triphasée appliquée  $u(t)$ .

Dans la suite  $s$  est la variable de Laplace. On pose  $\Omega(s)$  et  $U(s)$  les transformées de Laplace respectives de  $\Omega(t)$ , vitesse de rotation du berceau, et  $u(t)$ , tension efficace aux bornes du moteur. La fonction de transfert en boucle ouverte reliant la vitesse de rotation du berceau

à la tension efficace appliquée en entrée du moteur autour du point  $\psi = 0$  est donnée par l'expression ( voir Fig. 8 Annexe N p. XIV ) :

$$G_{\Omega_{BO}}(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{0,25}{2,5 \cdot 10^{-2} s^2 + 41s - 1}$$

Etudier la stabilité de cette fonction de transfert. Compte tenu de l'étude mécanique, proposez une justification physique au comportement constaté.

**Question 2.4.2** En pratique, cet asservissement est réalisé par deux boucles imbriquées ( voir la Fig. 8, annexe N p. XIV ) de dynamiques suffisamment éloignées pour considérer qu'elles ne se perturbent pas mutuellement. La boucle de vitesse (ou boucle interne) assure la stabilisation du système et une dynamique suffisante, la boucle externe assure le positionnement proprement dit. Le schéma précédent peut donc être simplifié en remplaçant la boucle interne par une fonction de transfert équivalente  $G_{\Omega_{BF}}(s)$  ( Fig. 9 de la même Annexe ). Dans la suite on suppose la boucle de vitesse déjà définie et on ne s'intéressera qu'à l'asservissement de position.

Sur l'Annexe O p. XV a été représentée la réponse à un échelon unitaire de la fonction de transfert  $G_{\Omega_{BF}}(s)$ . De quel type est cette réponse ? Déterminer sur cette figure le temps de réponse à 5%, le premier dépassement en %, le temps de premier dépassement et la valeur en régime établi. En déduire le gain, l'amortissement et la pulsation naturelle de  $G_{\Omega_{BF}}(s)$  ( certaines formules sont rappelées sur l'Annexe N ).

**Question 2.4.3** Un profil typique de la consigne de position est représenté sur l'Annexe J p. XI. Justifier alors pourquoi le correcteur doit comporter au moins un intégrateur. Quel sera son influence sur la stabilité ?

**Question 2.4.4** Le correcteur est de la forme  $C(s) = K_{corr}K(s)$  où  $K_{corr}$  est un gain et  $K(s)$  une fonction de transfert. Le diagramme de Bode de l'Annexe O p. XV est celui de la fonction de transfert  $K(s) \cdot \frac{G_{\Omega_{BF}}(s)}{s}$ . Estimer à partir du graphique le gain  $K_{corr}$  permettant d'obtenir la marge de phase maximale. Préciser la pulsation  $\omega_c$  correspondante.

### 3 Amélioration des performances

On s'intéresse ici à la liaison pivot réalisée entre le berceau et le bâti de la machine ( Annexe P p. XVI ). L'Annexe Q p. XVIII Fig. 16 représente un schéma technologique de cette liaison sur lequel on a représenté notamment le roulement à billes à contact radial de la partie gauche de la liaison ( voir Fig. 12 ) et l'accouplement rigide par frette conique entre le berceau (1) et l'arbre de sortie du motoréducteur (2). Le principe et la mise en oeuvre de cet accouplement sont détaillés Fig. 15 annexe Q p. XVIII. On précise que la liaison entre l'arbre (2) et le corps du motoréducteur M1X est une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_0)$ .

**Question 3.1** En analysant en particulier le schéma technologique de la liaison actuelle représenté sur la Fig. 16 de la même Annexe, expliquer comment a été prévu le réglage de la position axiale du berceau par rapport au bâti ? Pour quelle(s) raison(s) ce réglage est-il nécessaire ?

**Question 3.2** Etablir le graphe des liaisons entre les pièces notées (0), (1), (2) et (3) en précisant pour chacune des liaisons leur nom et la forme générale du torseur des actions mécaniques transmissibles associé.

Calculer alors le degré d'hyperstaticité de ce mécanisme. Expliquer l'intérêt d'avoir ici un mécanisme hyperstatique.

**Question 3.3** Les actions mécaniques appliquées par l'extérieur sur ce mécanisme sont :

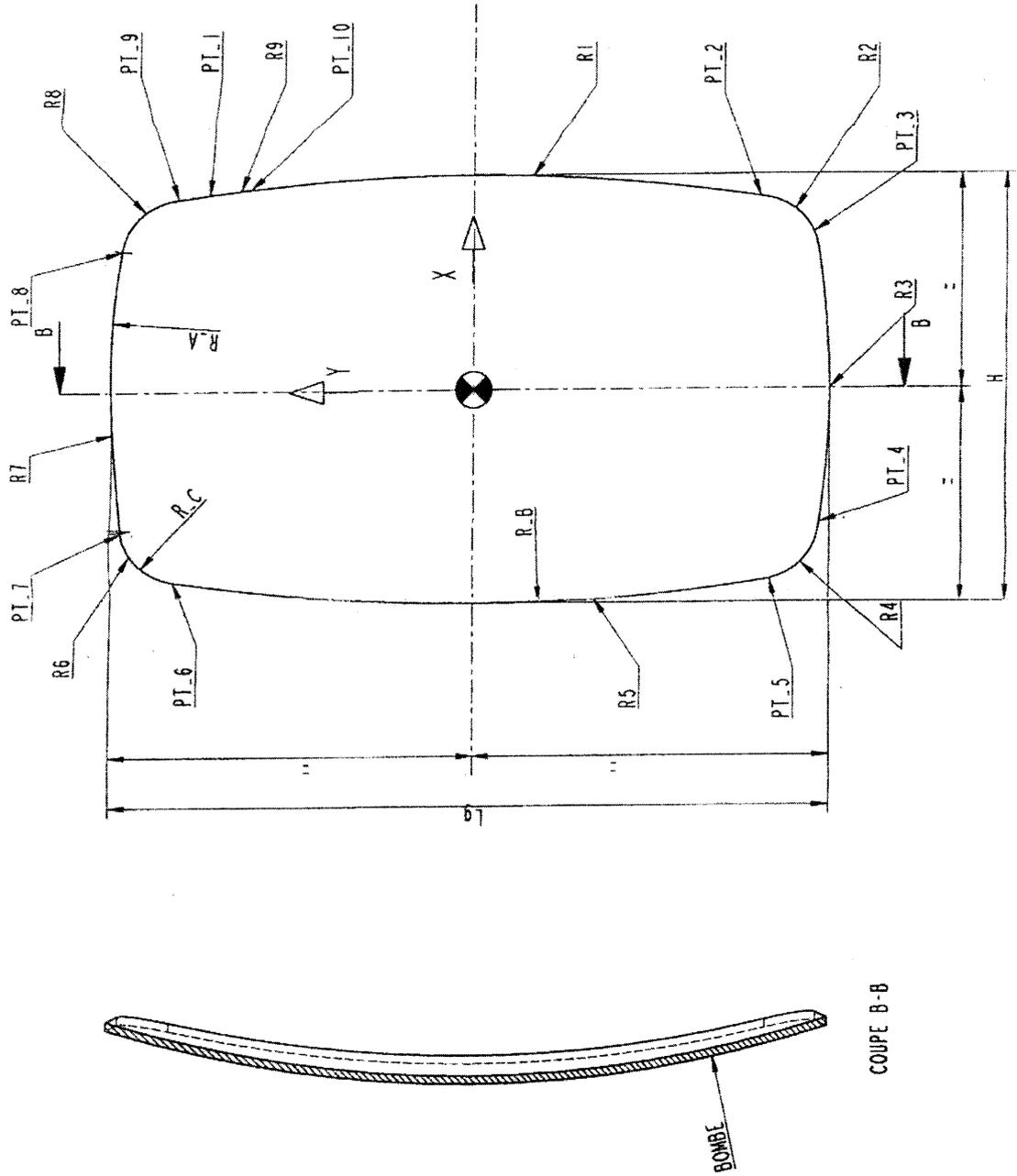
- Le couple moteur ramené sur l'arbre de sortie du réducteur
- La force de découpe que l'on peut décomposer en trois composantes :  $F_x$  sur  $(C, \vec{x}_0)$ ,  $F_y$  sur  $(C, \vec{y}_0)$  et  $F_z$  sur  $(C, \vec{z}_0)$ .

Montrer qu'une partie de la force de découpe s'exerce sur la liaison pivot entre (2) et (3).

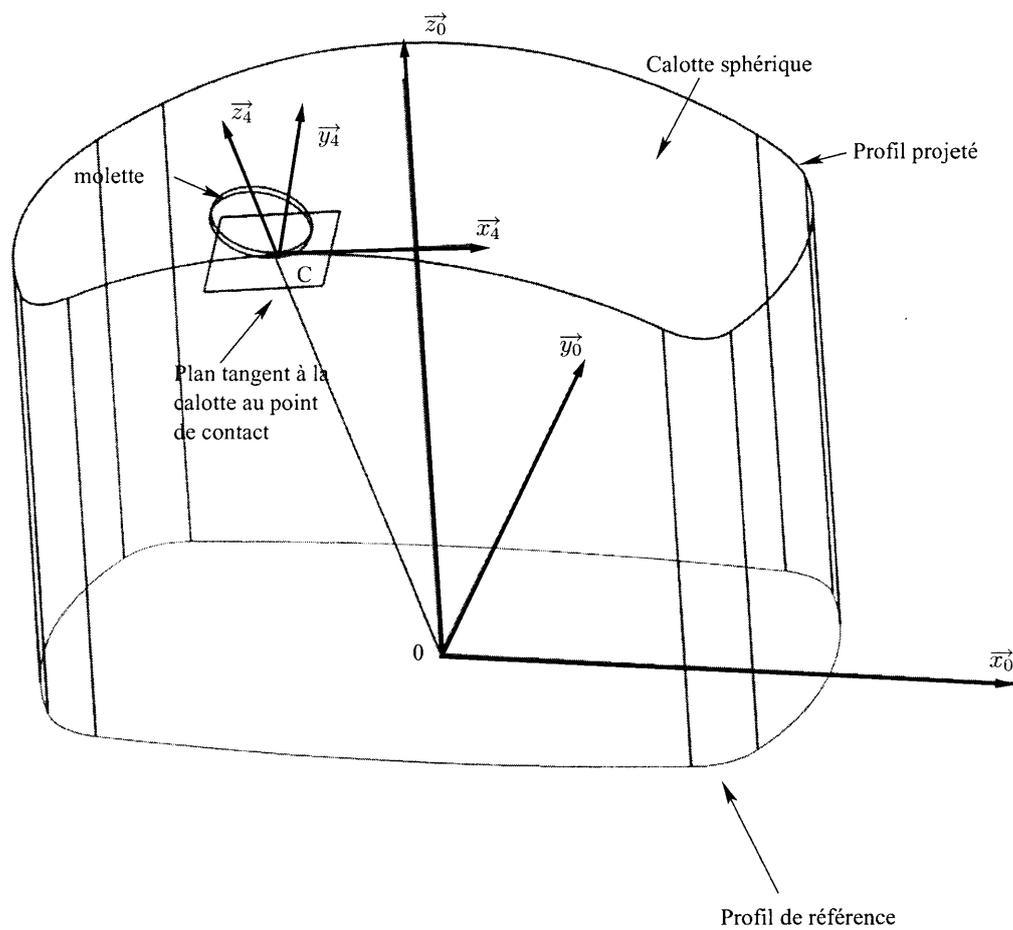
**Question 3.4** On constate en pratique que la liaison pivot entre (2) et (3) est sous dimensionnée pour résister aux forces axiales et radiales qu'elle transmet. On demande de proposer sous forme de schéma une solution avec une ou plusieurs liaison(s) supplémentaire(s) permettant de diminuer le plus possible les forces axiales et radiales transmises par cette liaison.

Une justification des choix proposés est attendue et pourra, notamment, se faire sous forme d'un graphe des liaisons commenté.

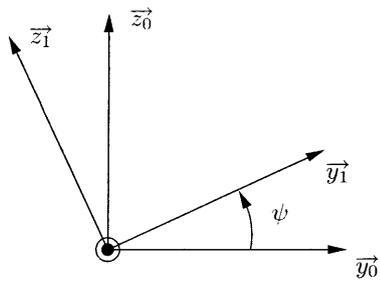
# A Dessin du miroir



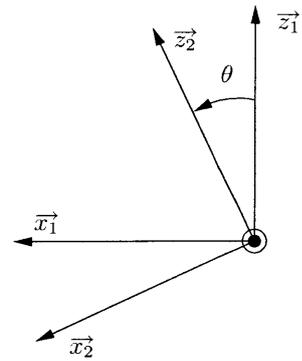
## B Intersection Profil/Sphère



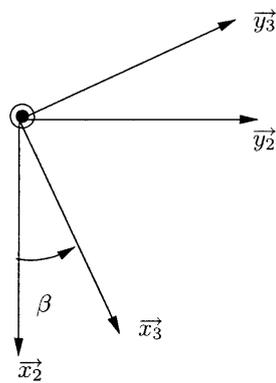
## C Définition des bases de l'étude



Définition de la base  $B_1$

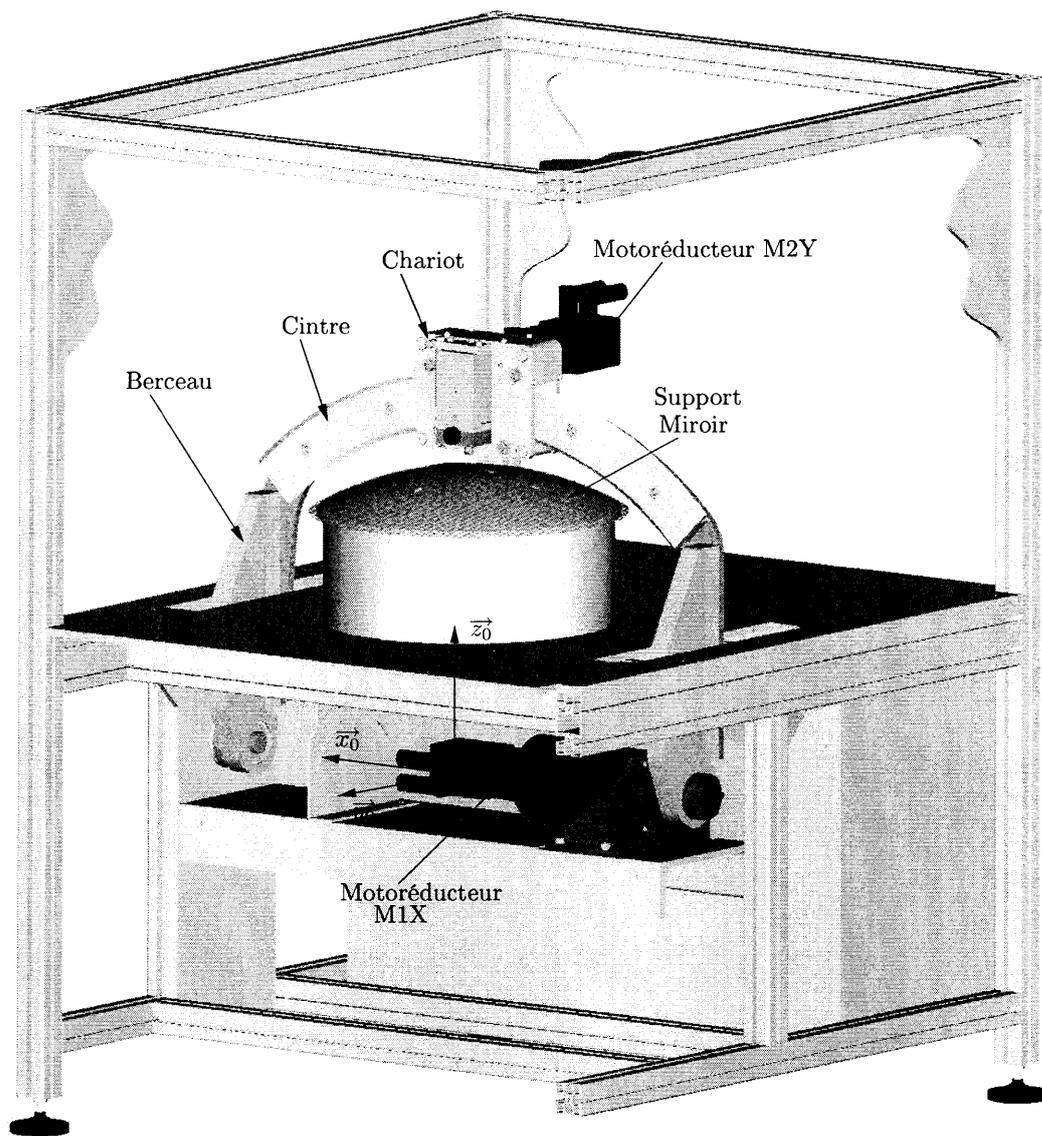


Définition de la base  $B_2$



Définition de la base  $B_3$

## D Machine à découper les miroirs



## E Chariot

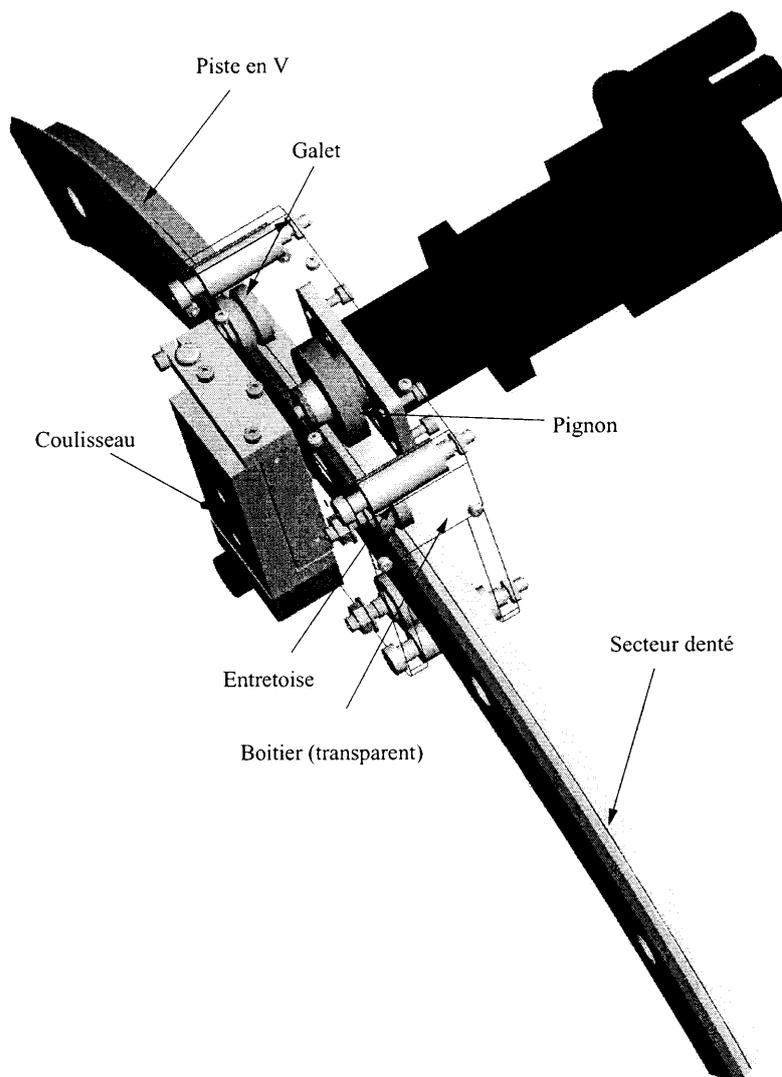


FIG. 2 - Détails du guidage du chariot

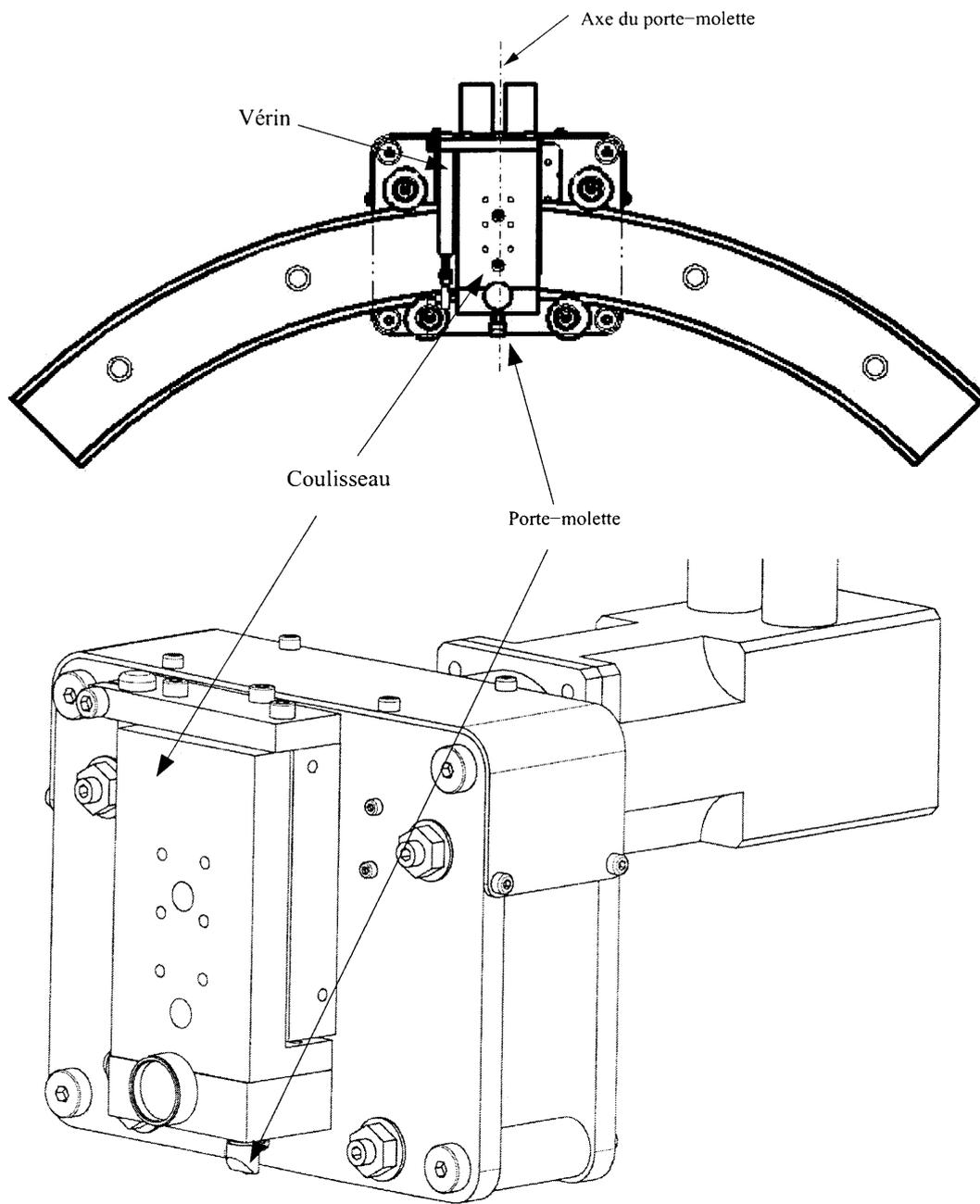
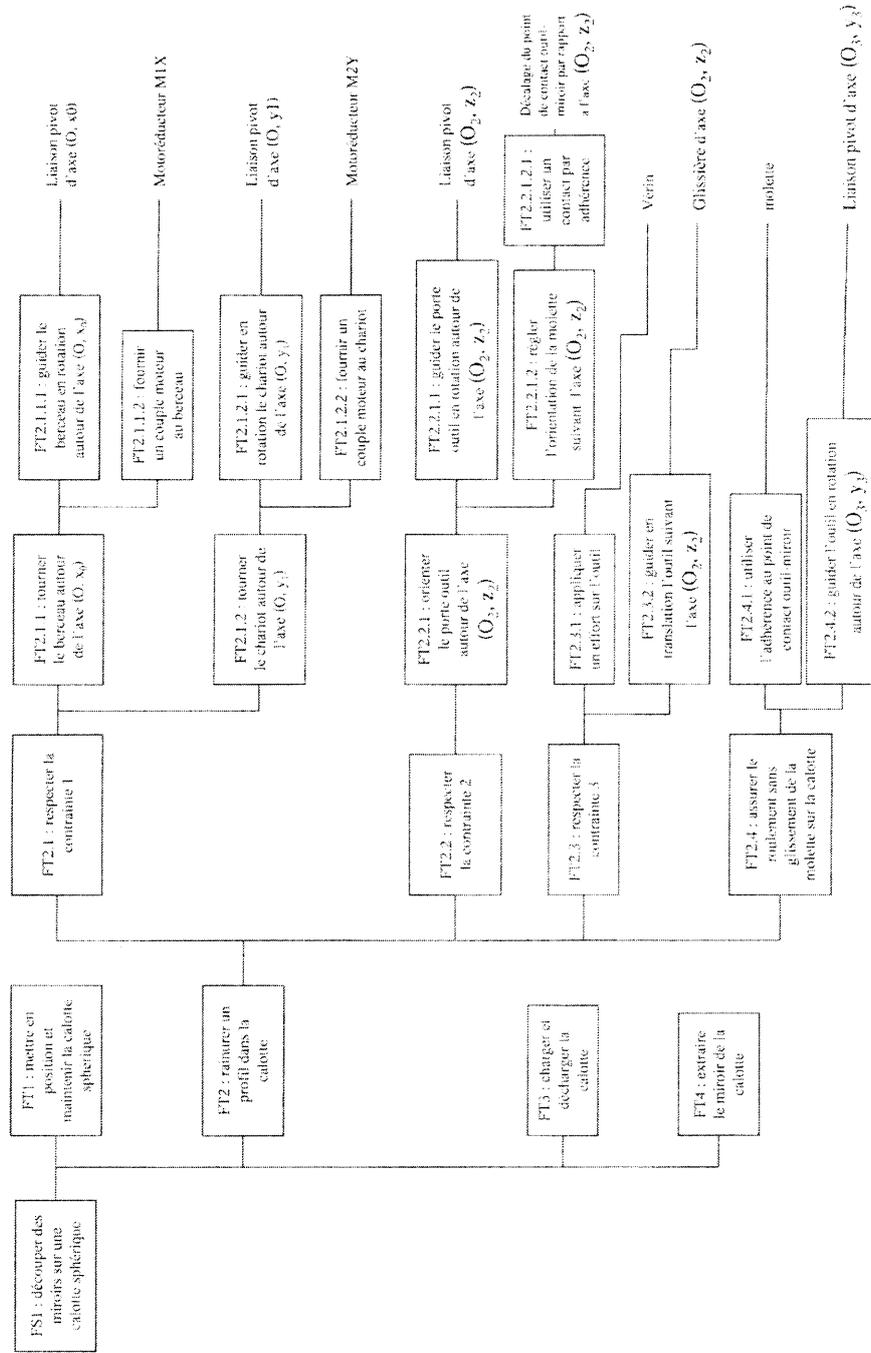


FIG. 3 - Détails de la partie active du chariot

# F Diagramme FAST



## G Grafcet de la réalisation d'un miroir

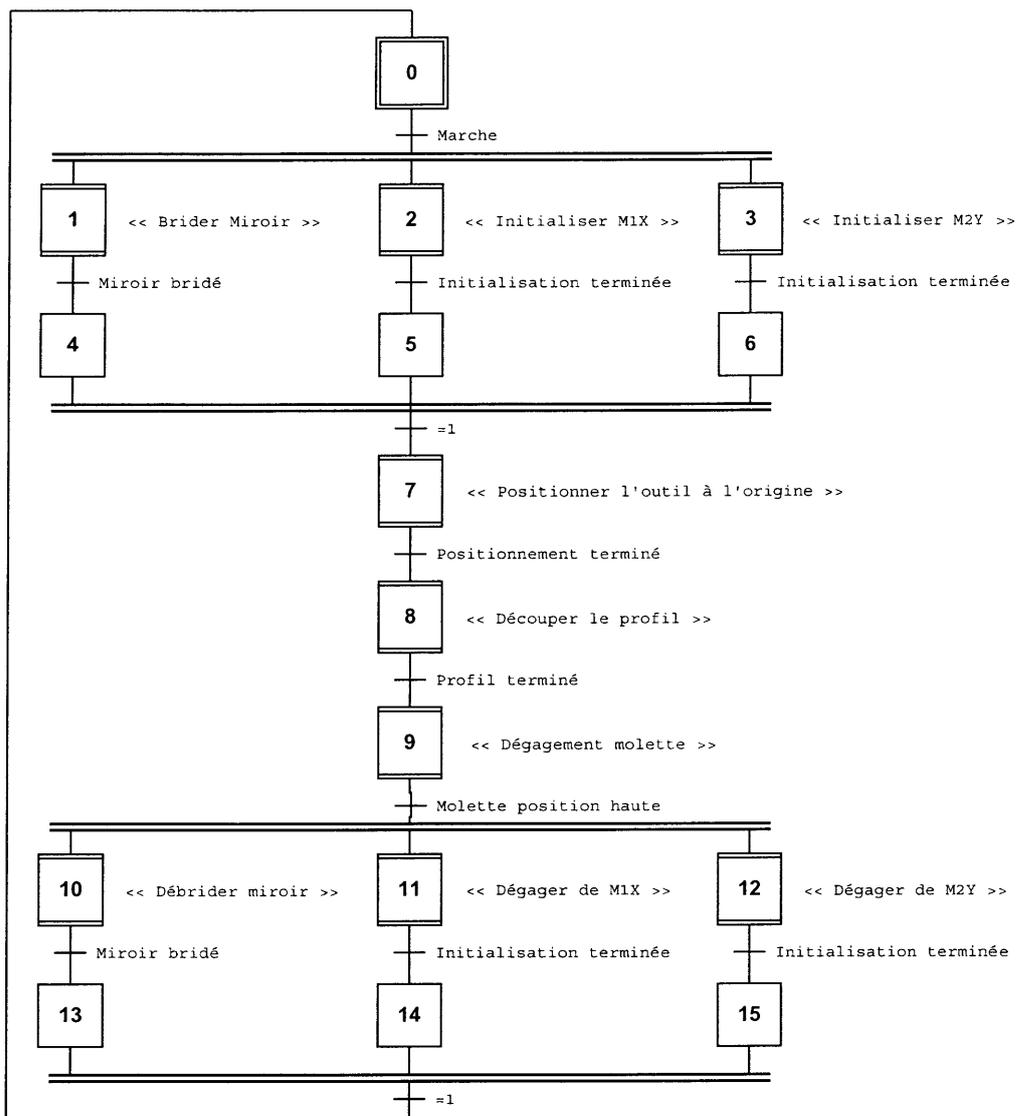


FIG. 4 – Grafcet de la réalisation d'un miroir

## H Documentation technique de la motorisation

### caractéristiques techniques

Caractéristiques	Symboles	Unités	BLS 71	BLS 72	BLS 73	BLS 74
Vitesse maximale	n	R.P.M.	11 000	9 000	5 600	5 000
Couple à l'arrêt <sup>(1)</sup>	Ms	Nm	0,8	1,9	2,7	3,4
Intensité à l'arrêt	Is	A	2,2	4,1	3,8	4,3
Couple crête	Mj	Nm	4,8	11,1	16,3	20,6
Couple massique	Tw	Nm/kg	0,6	1	1,2	1,2
Constante de F.E.M. ± 5 %	Ke	V/rad/s	0,2	0,3	0,4	0,5
Constante de couple ± 5 %	Kt	Nm/A	0,4	0,5	0,7	0,8
Couple de réluctance	Tr	Nm	<0,02	<0,02	<0,02	<0,02
Résistance d'enroulement	R	Ω	10,4	5	6,5	5,6
Inductance	L	mH	7,5	5,4	6,5	6,7
Inertie rotor <sup>(2)</sup>	J	kg.m <sup>2</sup> .10 <sup>-9</sup>	0,03	0,05	0,06	0,08
Constante de temps mécanique	Tm	ms	3,5	2,1	1,4	1,2
Constante de temps électrique	Te	ms	0,7	1,1	1	1,2
Constante de temps thermique	Tth	s	480	540	1 080	1 020
Résistance thermique	Rth	C°/W	1,6	1	0,9	0,8
Masse	M	Kg	1,5	1,9	2,3	2,8
Charge radiale <sup>(3)</sup>	Fr	N	274	274	274	274
Charge axiale	Fa	N	98	98	98	98
Isolation			F	F	F	F
Protection			IP-65	IP-65	IP-65	IP-65

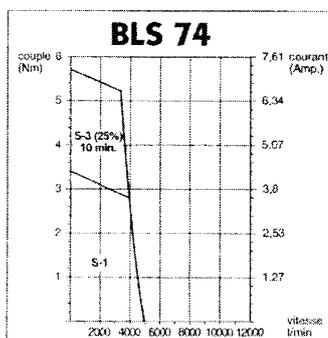
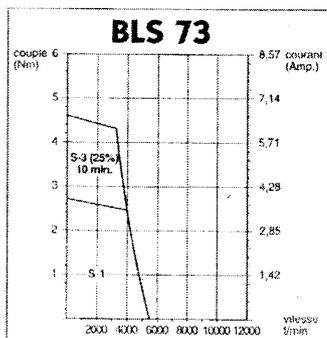
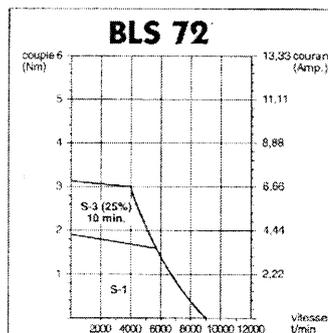
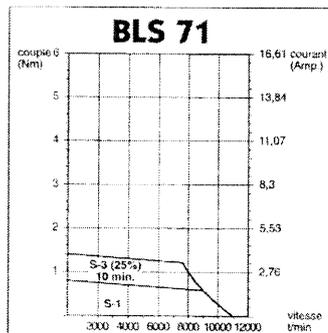
(1) Avec plaque de refroidissement en aluminium 300 x 300 x 10 mm.

(2) Charge radiale appliquée à 1/2 longueur de l'arbre.

(3) Sans frein.

Toutes les caractéristiques sont mesurées à 25°C ambiant.

### courbes



# I Modèle dynamique du berceau

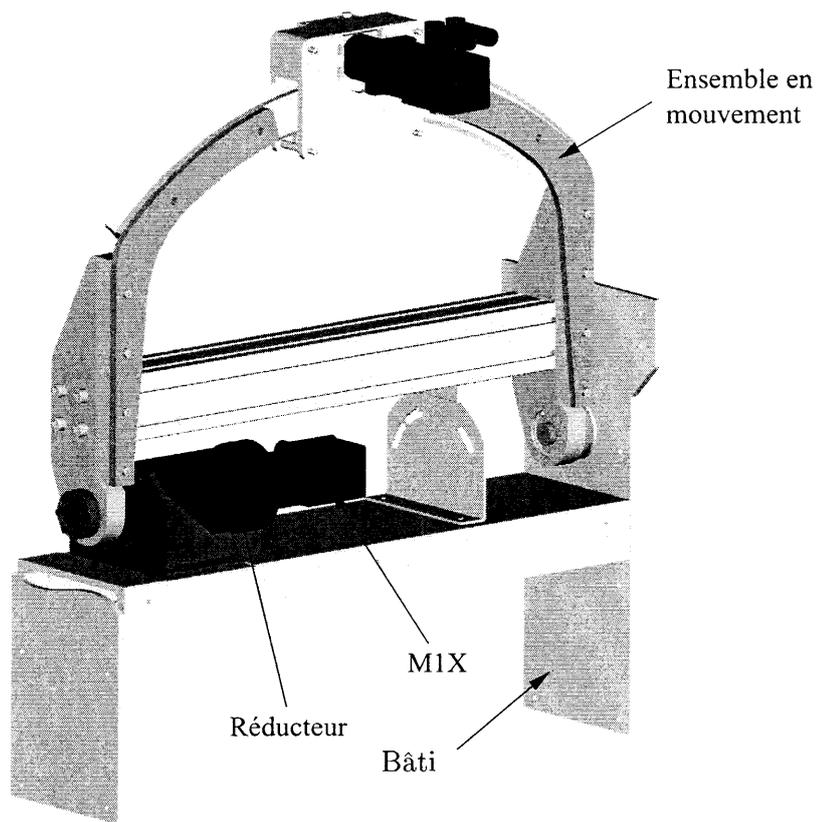


FIG. 5 – Système modélisé

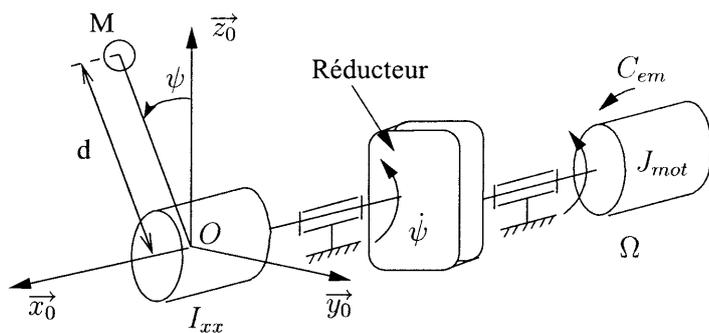
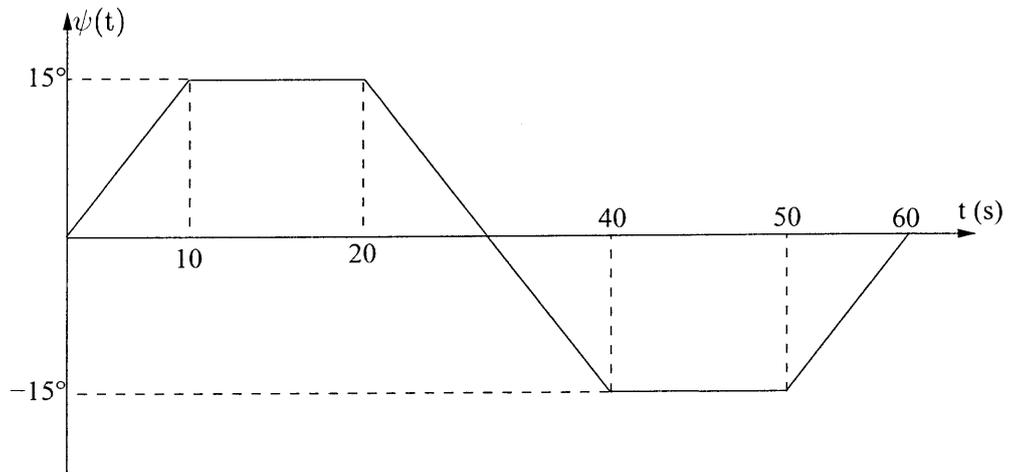
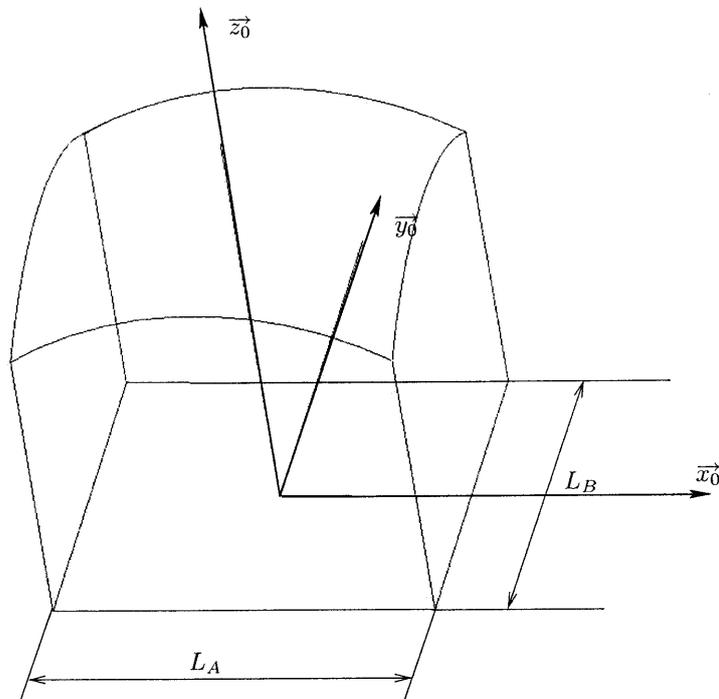


FIG. 6 – Modèle du berceau et de sa motorisation

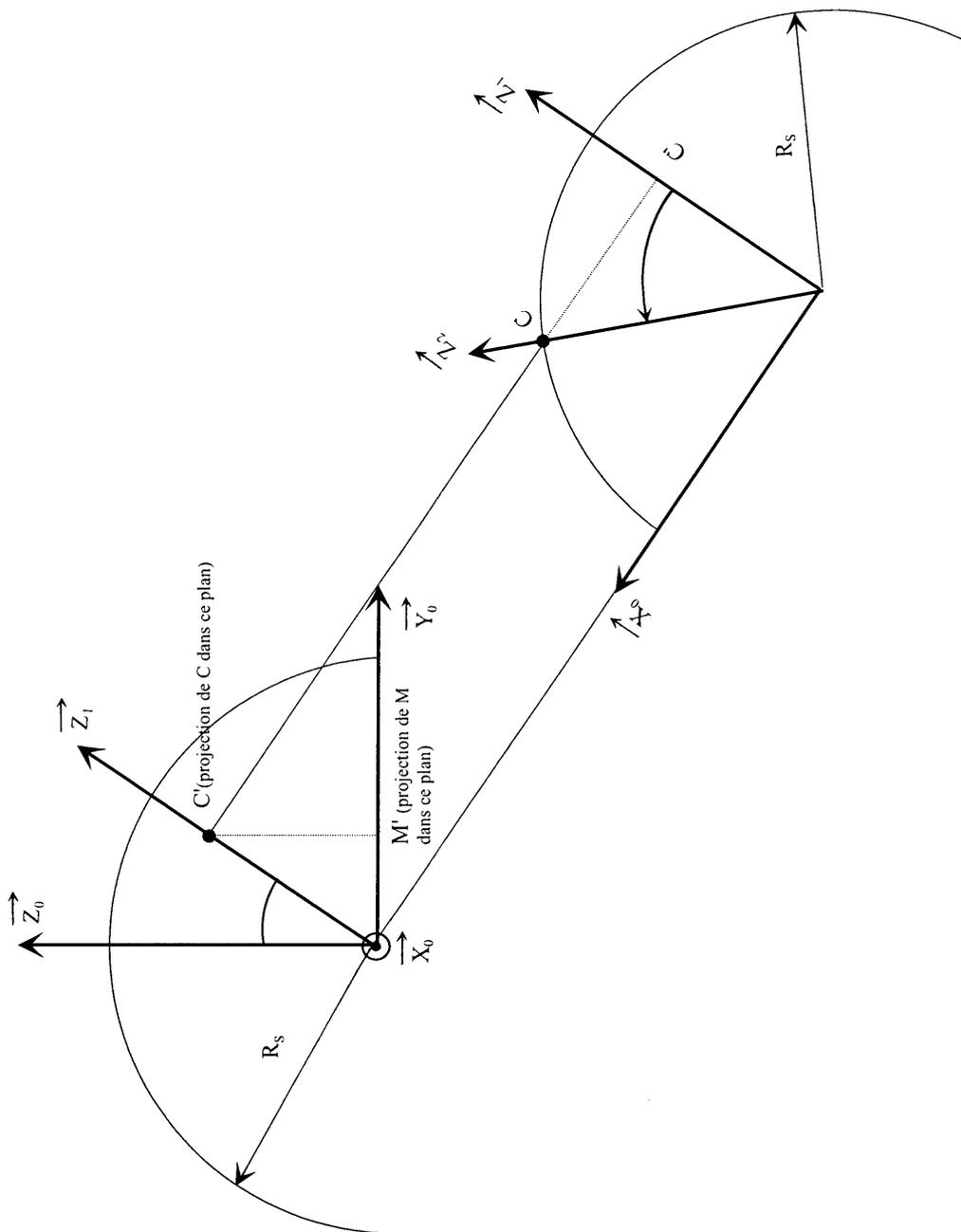
### J Profil type de consigne de position pour l'axe M1X



### K Profil simplifié



# L Projection du point de contact



## M Etude du guidage de la molette

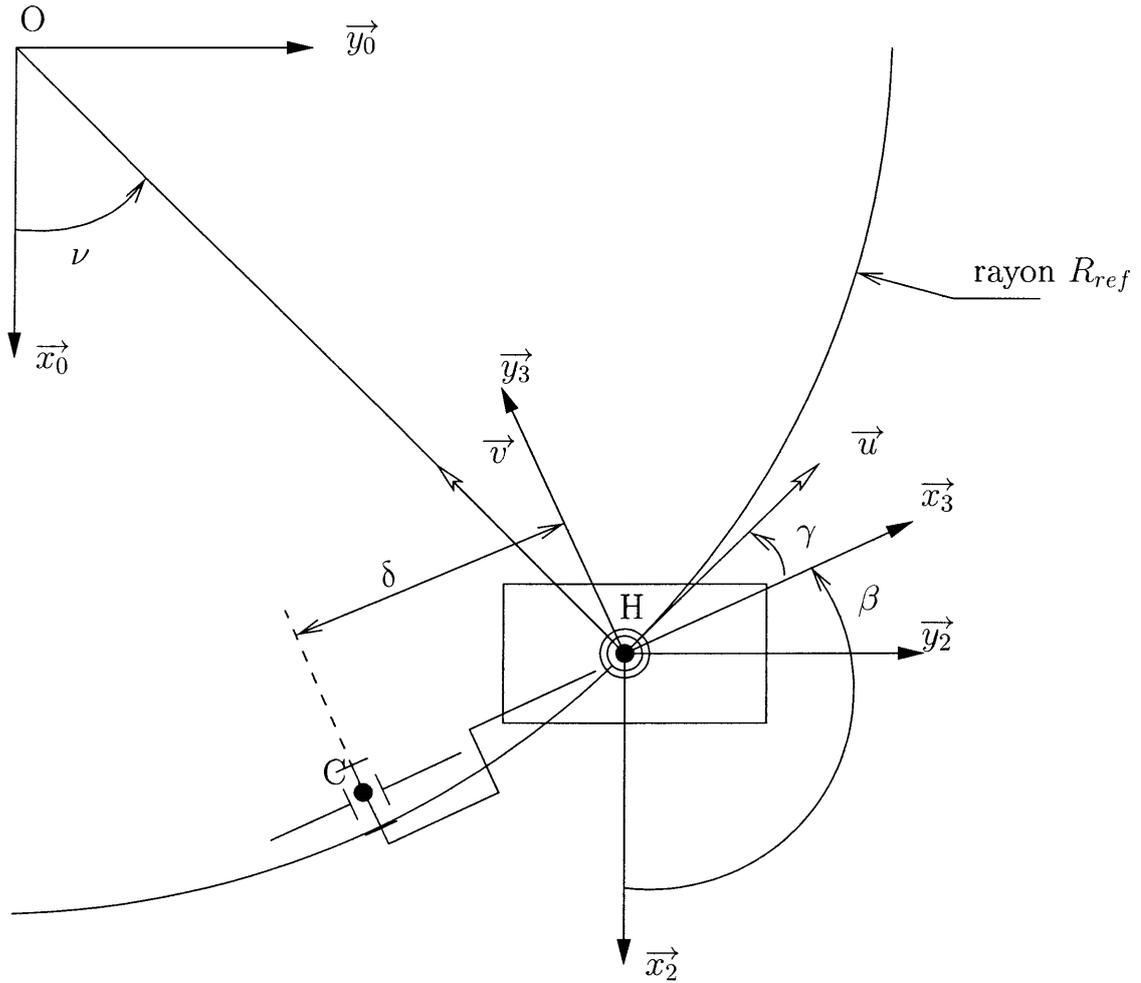


FIG. 7 - Etude cinématique de la molette

## N Schéma bloc du système

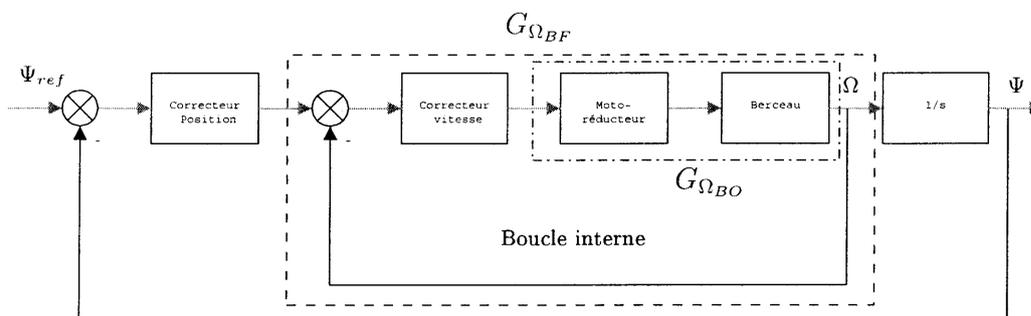


FIG. 8 – Principe de l'asservissement par boucles imbriquées

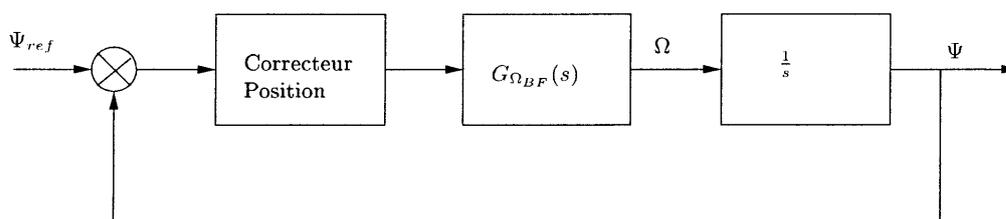


FIG. 9 – Diagramme bloc simplifié

**Formulaire : relations entre caractéristiques d'un système du second ordre et réponse indicielle**

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$D\% = e^{\frac{-\pi\xi}{1 - \xi^2}}$$

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

avec :

- $D\%$  : premier dépassement en
- $\omega_n$  : pulsation naturelle non-amortie
- $\omega_a$  : pulsation naturelle amortie
- $t_p$  : temps d'atteinte du premier pic
- $\xi$  : amortissement

## O Réponse du berceau asservi en vitesse

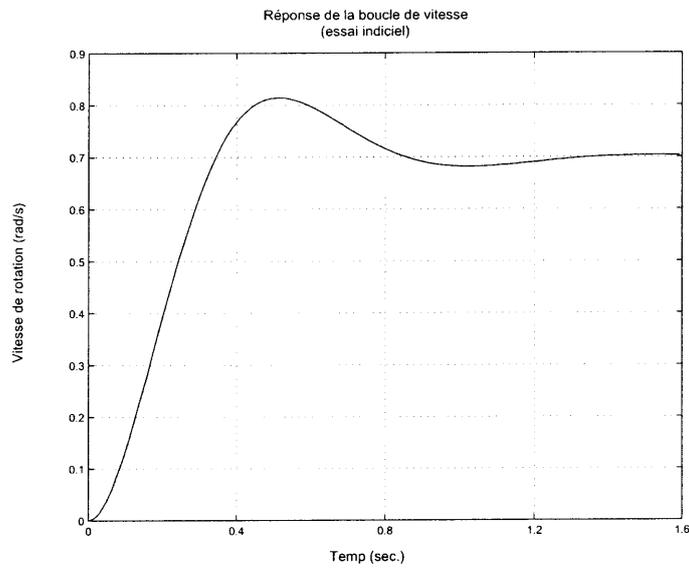


FIG. 10 – Réponse du berceau à une réponse indicielle de vitesse

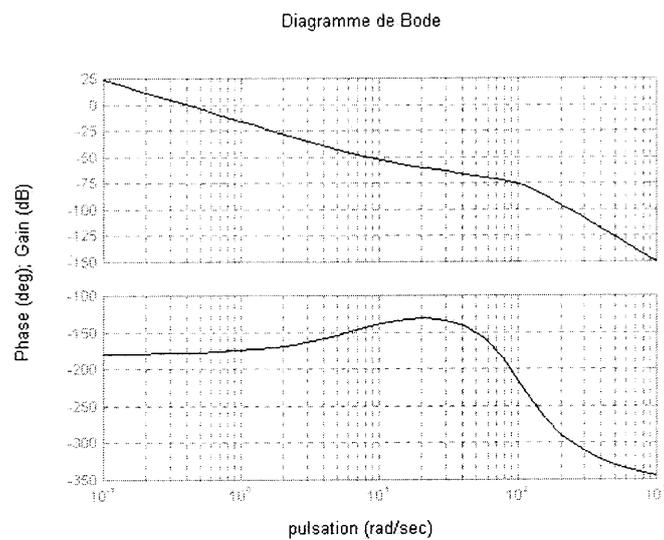


FIG. 11 – Diagramme de bode du système corrigé (gain  $K_{corr} = 1$ )

P Liaison entre le berceau et le bâti

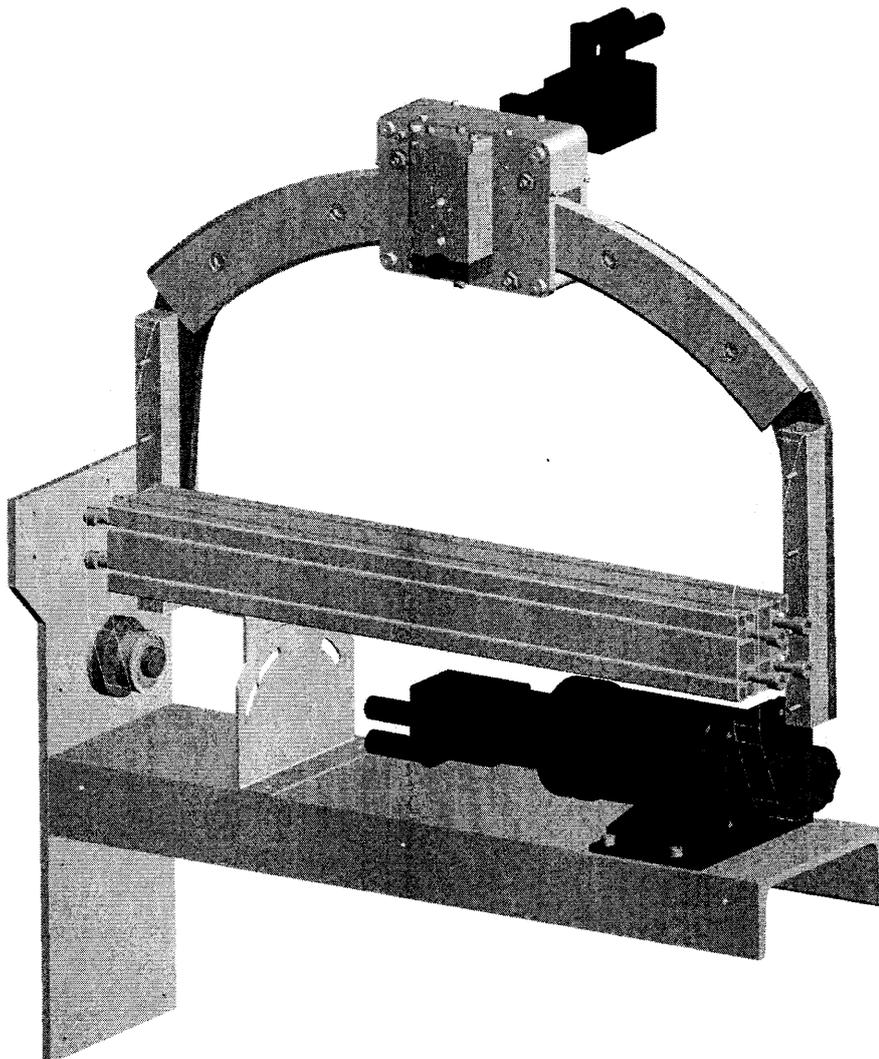


FIG. 12 – Vue globale de la liaison

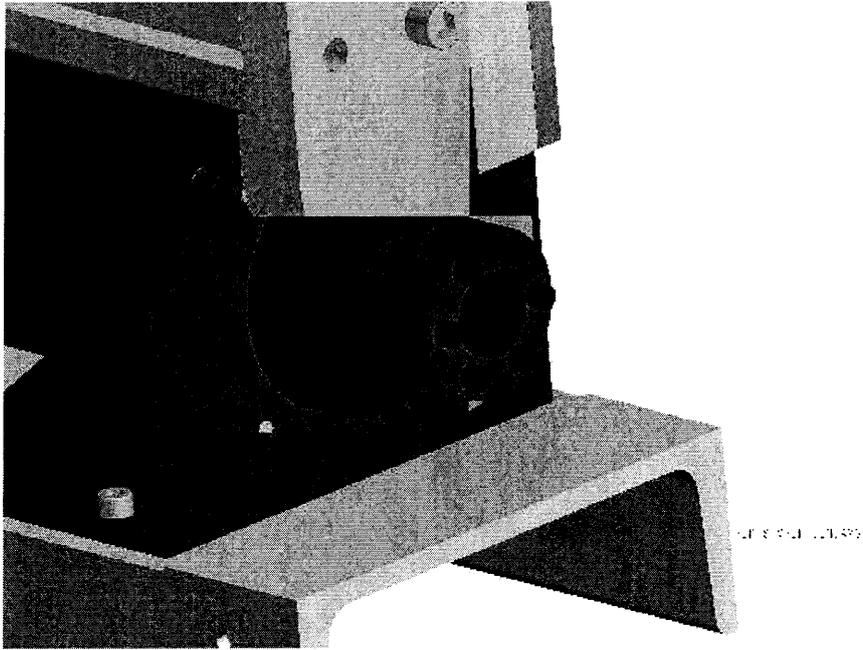


FIG. 13 – Détails de la liaison côté motoréducteur

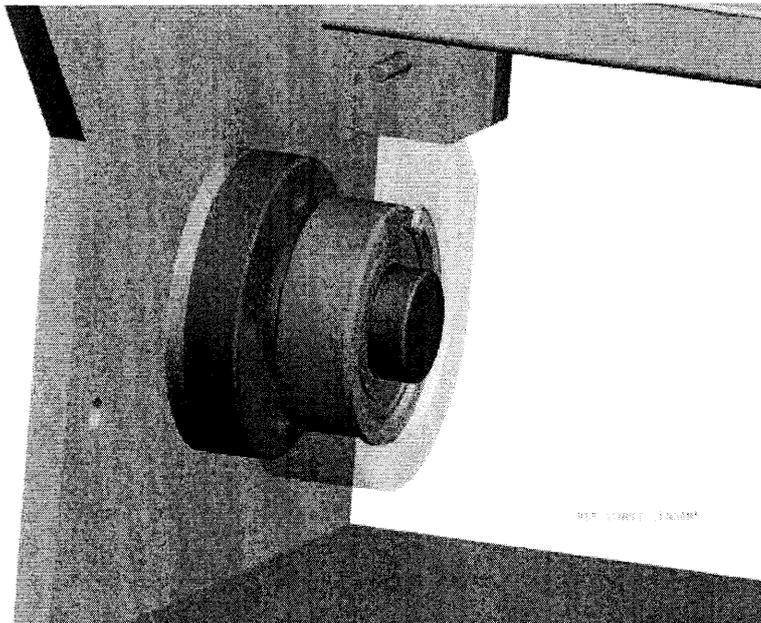


FIG. 14 – Détails de la liaison côté roulement

## Q Technologie de la liaison berceau-bâti

Principe de la liaison frettée : la liaison arbre-moyeu par frettage réalise une liaison encastrement par adhérence. La pression de contact arbre-moyeu est obtenue par serrage des portées. Les déformations nécessaires à ce serrage peuvent être réalisées éventuellement par des procédés thermiques ou hydrauliques. Le système de frettes standard présenté ici est purement mécanique puisque les déformations requises pour l'établissement de la pression de contact sont obtenues par glissement relatif de deux portées coniques

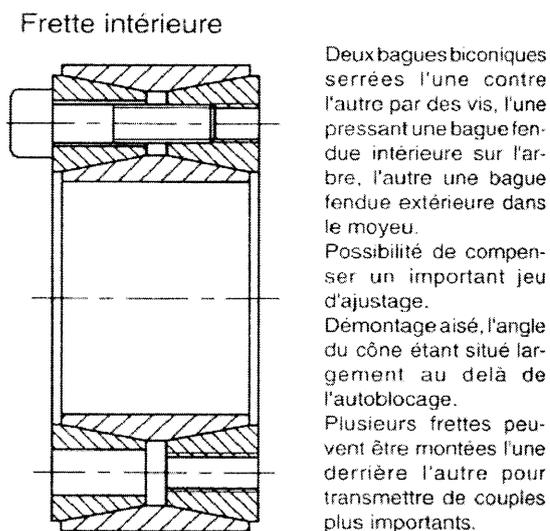


FIG. 15 – Frette conique

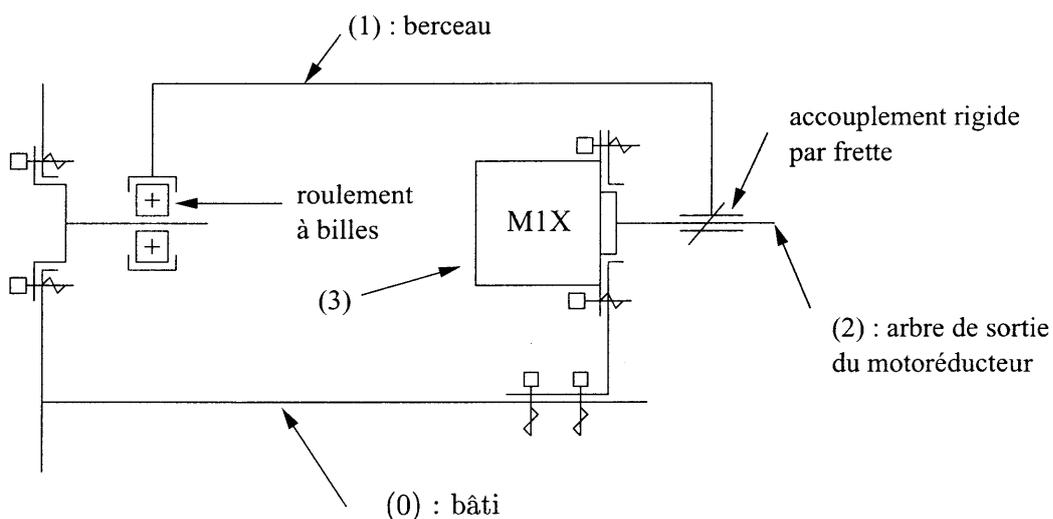


FIG. 16 – Schéma technologique de la liaison berceau-bâti