سلسلة 3	أولمبياد الرياضيات حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

التمارين مستخرجة من الكتاب المدرسي المفيد في الرياضيات-التحليل

تمرين 1 :

نضع: $S=\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|$ منه : $S=\left|\sum_{i=1}^{n}2\sin x_i\cos x_i\right|=2\left|\sum_{i=1}^{n}\sin x_i\cos x_i\right|$

و نعلم أن : $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2$ $\forall(a_1,a_2,...,a_n)\in IR^n\ \forall(b_1,b_2,...,b_n)\in IR^n$

إذن : $S^2=\left(2\left|\sum_{i=1}^{n}\sin x_i\cos x_i\right|\right)^2=4\left(\sum_{i=1}^{n}\sin x_i\cos x_i\right)^2\leq 4\left(\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\cos^2 x_i\right)$

و بما أن : $\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=a$ فإن : $\sum_{i=1}^{n}\cos^2 x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\sin^2 x_i\right)=n-\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=n-a$

منه : $S^2\leq 4a(n-a)$ أي : $\boxed{S\leq 2\sqrt{a(n-a)}}$ (لأن : $S\geq 0$)

من جهة أخرى : بما أن : $0\leq a\leq n$ فإن : $0\leq\sqrt{\frac{a}{n}}\leq 1$ إذن يوجد عدد حقيقي : α حيث $\sin(\alpha)=\sqrt{\frac{a}{n}}$

إذا أخذنا الأعداد x_i بحيث : $x_1=x_2=...=x_n=\alpha$

نجد أن هذه الأعداد تحقق شروط المسألة حيث أن : $\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=\sum_{i=1}^{n}\sin^2\alpha=n\sin^2\alpha=n\frac{a}{n}=a$

و هكذا نجد أن :

$$S=\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2\alpha\right|=2\left|\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha\cos\alpha\right|=2n\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$S=2n\sqrt{\frac{a}{n}}\left(\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)=2n\sqrt{\frac{a}{n}}\sqrt{1-\frac{a}{n}}=2n\sqrt{\frac{a}{n}}\sqrt{\frac{n-a}{n}}=2\sqrt{a(n-a)}$$

و هذا يعني أن القيمة القصوية للتعبير S هي : $2\sqrt{a(n-a)}$

المتفاوتة المستعملة تسمى متفاوتة **Cauchy-Schwarz**

تمرين 2 :

نضع : $x+y+z=p$ منه : $xyz=\frac{1}{p}$ ، منه :

$$S=(x+y)(y+z)=(p-z)(p-x)=p^2-px-pz+zx$$

$$S=p^2-p(x+z)+\frac{1}{py}=p^2-p(p-y)+\frac{1}{py}=py+\frac{1}{py}$$

و نعلم أن : $a+\frac{1}{a}\geq 2\quad\forall a>0$ (متفاوتة هامة) (و يكون التساوي إذا وفقط إذا كان $a=1$) إذن : $\boxed{S\geq 2}$

نأخذ : $x=z=1$ و $y=\sqrt{2}-1$ ، هذه القيم تحقق شروط المسألة : $xyz(x+y+z)=(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})=1$

و هكذا : $S=(1+\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1+1)=2$ ، بالتالي القيمة الدنوية للتعبير S هي : 2

لاحظ أنه لايكفي أن نبرهن أن $S\geq 2$ لكي نبرهن أن 2 قيمة دنوية ، بل يجب أن نجد قيما تحقق $S=2$

تمرين 3 :

لدينا : $x+y+z=5$ منه : $xy+yz+zx=3$

إذن : $\begin{cases}x+y=5-z\\ xy=3-z(x+y)\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x+y=5-z\\ xy=3-z(5-z)\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x+y=5-z\\ xy=z^2-5z+3\end{cases}$

إذن العددان x و y يوجدان إذا وفقط إذا كان للمعادلة $t^2-(5-z)t+(z^2-5z+3)=0$ حل على الأقل في IR

أي : $\Delta=(z-5)^2-4(z^2-5z+3)\geq 0$

لدينا:

$$(z-5)^2-4(z^2-5z+3)\geq 0 \Leftrightarrow z^2-10z+25-4z^2+20z-12\geq 0$$
$$\Leftrightarrow -3z^2+10z+13\geq 0 \Leftrightarrow 3z^2-10z-13\leq 0$$

$$\Delta=100+156=256 \Rightarrow z_1=\frac{10+16}{6}=\frac{13}{3} \quad et \quad z_2=\frac{10-16}{6}=-1$$

إذن : $(z-5)^2-4(z^2-5z+3)\geq 0 \Leftrightarrow z\in\left[-1,\frac{13}{3}\right] \Leftrightarrow -1\leq z\leq \frac{13}{3}$

بالتالي أكبر قيمة ممكنة لـ z هي $\frac{13}{3}$

لاحظ أننا عكس التمرين السابق لم نحتج أن نجد قيما لـ x و y حيث يكون $z=\frac{13}{3}$ و السبب أننا استعملنا تكافؤا،
لكن في التمرين السابق استعملنا استلزاما فقط، بمعنى أنه في حال الاستلزام فقط يتوجب التحقق من المنحى العكسي بإيجاد قيم تحقق القيم القصوية أو الدنوية.

نتذكر أن زوج حل النظمة $\begin{cases}x+y=s\\ xy=p\end{cases}$ هما حلا المعادلة $t^2-st+p=0$

تمرين 4 :

المعادلة $x^2-3px-p=0$ تقبل جذرين حقيقين مختلفين x_1 و x_2 إذا وفقط إذا كان : $\Delta=9p^2+4p>0$

في هذه الحالة لدينا : $x_1+x_2=3p$

لدينا :

$$A=\frac{p^2}{3px_1+x_2^2+3p}+\frac{3px_1+x_2^2+3p}{p^2}=\frac{p^2}{3px_1+3px_2+p+3p}+\frac{3px_1+3px_2+p+3p}{p^2}$$
$$A=\frac{p^2}{3p(x_1+x_2)+4p}+\frac{3p(x_1+x_2)+4p}{p^2}=\frac{p^2}{9p^2+4p}+\frac{9p^2+4p}{p^2}=\frac{p^2}{\Delta}+\frac{\Delta}{p^2}$$

و بما أن : $\frac{p^2}{\Delta}>0$ فإن : $\frac{p^2}{\Delta}+\frac{\Delta}{p^2}\geq 2$ (نذكر بالمتفاوتة الهامة : $\forall a>0 \quad a+\frac{1}{a}\geq 2$)

و لدينا أيضا :

$$\frac{p^2}{\Delta}+\frac{\Delta}{p^2}=2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{\Delta}=1 \Leftrightarrow p^2=9p^2+4p \Leftrightarrow 8p^2+4p=0 \Leftrightarrow p(2p+1)=0 \Leftrightarrow p=0 \ ou \ p=\frac{-1}{2}$$

القيمة : $p=\frac{-1}{2}$ تحقق شروط المسألة، حيث : $\Delta=9p^2+4p=9\times\frac{1}{4}-4\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}>0$

خلاصة: $A\geq 2$ و $p=\frac{-1}{2}\Rightarrow A=2$ ، إذن القيمة الدنوية للتعبير A هي 2

تمرين 5 :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^k\left(1+\frac{b}{a}\right)^k}$$

نعلم أن لكل $x>0$ و $y>0$ ، $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ إذن :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{b}\right)\left(\frac{a+b}{a}\right)\right)^k}$$

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2\sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{ab}\right)^k}$$

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2\sqrt{4^k}$$

و نعلم أن : $(a+b)^2\geq 4ab$ إذن :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2\times 2^k$$

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2^{k+1}$$

نأخذ : $a=b$ نجد : $\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k=2^k+2^k=2\times 2^k=2^{k+1}$

بالتالي : القيمة الدنوية للتعبير $\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k$ هي 2^{k+1}

تمرين 6 :

لدينا : $x+y+z=1$ إذن :

$$S=\frac{x^2}{x+yz}+\frac{y^2}{y+zx}+\frac{z^2}{z+xy}$$

$$S=\frac{x(1-y-z)}{x+yz}+\frac{y(1-x-z)}{y+zx}+\frac{z(1-x-y)}{z+xy}$$

$$S=\frac{x-xy-xz}{x+yz}+\frac{y-xy-yz}{y+zx}+\frac{z-xz-yz}{z+xy}$$

$$S=\frac{x+yz-yz-xy-xz}{x+yz}+\frac{y+zx-zx-xy-yz}{y+zx}+\frac{z+xy-xy-xz-yz}{z+xy}$$

$$S=1-\frac{(yz+xy+xz)}{x+yz}+1--\frac{(yz+xy+xz)}{y+zx}+1-\frac{(yz+xy+xz)}{z+xy}$$

$$S=3-(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{x+yz}+\frac{1}{y+zx}+\frac{1}{z+xy}\right)$$

$$S=3-(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{1-y-z+yz}+\frac{1}{1-x-z+zx}+\frac{1}{1-x-y+xy}\right)$$

$$S=3-(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{(1-y)(1-z)}+\frac{1}{(1-z)(1-x)}+\frac{1}{(1-x)(1-y)}\right)$$

$$S=3-(xy+yz+xz)\left(\frac{1-x+1-y+1-z}{(1-x)(1-y)(1-z)}\right)$$

$$S=3-(xy+yz+xz)\left(\frac{3-(x+y+z)}{(y+z)(x+z)(x+y)}\right)$$

$$S=3-2\ \frac{xy+yz+xz}{xy+yz+xz-xyz}$$

$$S=3-2\left(1+\frac{xyz}{xy+yz+xz-xyz}\right)$$

$$S=1-\frac{2}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}-1}$$

من جهة أخرى نعلم أن : $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)\geq 9$ (حسب متفاوتة متفاوتة **Cauchy-Schwarz**

حيث: $\frac{1}{\sqrt{z}}=b_3$; $\frac{1}{\sqrt{y}}=b_2$; $b_1=\frac{1}{\sqrt{x}}$; $a_3=\sqrt{z}$; $a_2=\sqrt{y}$; $a_1=\sqrt{x}$ (

منه : $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9\Rightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-1\geq 8\Rightarrow\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-}\leq\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{-2}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-}\geq\frac{-1}{4}$

منه : $S\geq 1-\frac{1}{4}\geq\frac{3}{4}$ ، وبأخذنا : $x=y=z=\frac{1}{3}$ نجد أن : $x+y+z=1$ و $S=\frac{3}{4}$

بالتالي : القيمة الدنوية للتعبير S هي $\frac{3}{4}$