

التمارين مستخرجة من الكتاب المدرسي المفيد في الرياضيات- التحليل

تمرين 1:

$$\text{لدينا: } a^5 - a^3 + a \geq 3 \text{ منه } a(a^4 - a^2 + 1) \geq 3 \text{ منه } (a^2)^2 - a^2 + 1 \geq \frac{3}{a}$$

$$\text{منه: } \frac{(a^2)^3 + 1}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{a} \text{ (استعملنا المتطابقة: } x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \text{)}$$

$$\text{منه: } a^6 + 1 \geq 3 \left(\frac{a^2 + 1}{a} \right) \text{ منه: } a^6 \geq 3 \left(a + \frac{1}{a} \right) - 1$$

$$\text{وبما أن: } a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ (متفاوتة هامة يمكن البرهان عليها بسهولة: } a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0 \text{)}$$

$$\text{فإن: } a^6 \geq 6 - 1 \text{ بالتالي: } \boxed{a^6 \geq 5}$$

تمرين 2:بما أن $a > 0$ و $b > 0$ و $c > 0$ و $b + c > a$ و $c + a > b$ و $a + b > c$ هي قياسات أضلاع مثلث فإن:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} = \frac{\frac{y+z}{2}}{x} + \frac{\frac{x+z}{2}}{y} + \frac{\frac{x+y}{2}}{z}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) \text{ منه: } \begin{cases} x+y=2c \\ y+z=2a \\ x+z=2b \end{cases} \text{ نضع: } \begin{cases} x=b+c-a \\ y=c+a-b \\ z=a+b-c \end{cases}$$

$$\geq \frac{1}{2} (2+2+2)$$

$$\geq 3$$

تذكر المتفاوتات الهامة: $\forall a > 0 \forall b > 0 \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ، $\forall x > 0 \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$

والتي هي مجرد حالات خاصة للمتفاوتة: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}$

تمرين 3:

$$\text{لدينا: } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\text{منه: } a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq 0 \text{ منه: } 1 + 2(ab + ac + bc) \geq 0 \text{ منه: } ab + bc + ac \geq \frac{-1}{2}$$

من جهة أخرى نعلم أن: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ و $a^2 + c^2 \geq 2ac$ و $b^2 + c^2 \geq 2bc$

$$\text{بجمع هذه المتفاوتات نجد: } 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\text{منه: } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \text{ منه: } 1 \geq ab + ac + bc \text{ بالتالي: } \boxed{\frac{-1}{2} \leq ab + bc + ac \leq 1}$$

تمرين 4 :

المتفاوتة المطلوب إثباتها غير صحيحة.

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{6} \times 3 = 2 \text{ ، لدينا } a = b = c = \frac{3}{4} > 0 \text{ نأخذ مثال مضاد :}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{\frac{3}{4}} \times 3 = \frac{\sqrt{27}}{2} \text{ و } \sqrt{a+b+c+3} = \sqrt{\frac{3}{4} \times 3 + 3} = \sqrt{\frac{9}{4} + 3} = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ لكن :}$$

$$\sqrt{a+b+c+3} < \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \text{ منه :}$$

قد يكون هناك خطأ مطبعي في أحد المعطيات، حتى بعكس المتفاوتة يمكننا إيجاد مثال مضاد على عدم صحتها

$$\text{(نأخذ : } a = 0 \text{ و } b = c = \frac{5}{4} > 0 \text{)}$$

لقد أثرت إدراج التمرين رغم علمي بخطأ المعطيات حتى يألف التلميذ تقصي صحة التمرين من خطأه خصوصا التمارين الموجودة على الأنترنت والتي قد تكون مقترحة فقط وليست رسمية، نادرا جدا ما قد يكون هناك خطأ في معطيات تمارين الأولمبياد الوطنية (على الأقل لم يسبق لي أن وقعت في مثل هذه الحالة، لكنني توصلت عبر الأنترنت ببعض الحالات) نظرا لأن واضعي التمارين هم أساتذة مختصون يقومون بتحليل التمرين وتمحيصه مرارا قبل المصادقة عليه، إن وجد خطأ ففي الغالب يكون خطأ مطبعيا يصعب اكتشافه إلا بعد الانكباب على إنجازه.

تمرين 5 :

$$x^2 \frac{y}{z} + y^2 \frac{z}{x} + z^2 \frac{x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow \frac{x^3 y^2 + y^3 z^2 + z^3 x^2}{x y z} \geq x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 y^2 + y^3 z^2 + z^3 x^2 \geq x^3 y z + y^3 x z + z^3 x y \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x^3 y^2 + y^3 z^2 + z^3 x^2 - x^3 y z - y^3 x z - z^3 x y \geq 0$$

$$\text{نضع : } P = x^3 y^2 + y^3 z^2 + z^3 x^2 - x^3 y z - y^3 x z - z^3 x y \geq 0 \text{ ولنبين إذن أن } P \geq 0$$

$$\text{و : } a = x - y \text{ و } b = y - z \text{ إذن وحسب المعطيات } x \geq y \geq z \geq 0 \text{ نستنتج أن : } a \geq 0 \text{ و } b \geq 0$$

$$\text{و أيضا : } y = b + z \text{ و } x = a + y = a + b + z$$

$$P = x^3 y^2 + y^3 z^2 + z^3 x^2 - x^3 y z - y^3 x z - z^3 x y^2$$

$$P = x^3 y^2 - x^3 y z + y^3 z^2 - y^3 x z + z^3 x^2 - z^3 x y^2$$

$$P = x^3 y(y - z) + y^3 z(z - x) + z^3 x(x - y)$$

$$P = x^3(b + z)b + y^3 z(-a - b) + z^3(a + y)a$$

$$P = x^3 b^2 + x^3 z b - y^3 z a - y^3 z b + z^3 a^2 + z^3 y a$$

$$P = x^3 b^2 + a^2 z^3 + x^3 z b - y^3 z b + z^3 y a - y^3 z a$$

$$P = x^3 b^2 + a^2 z^3 + z b(x - y)(x^2 + xy + y^2) + z y a(z^2 - y^2) \text{ منه :}$$

$$P = x^3 b^2 + a^2 z^3 + a b z(x^2 + xy + y^2) + z y a(z - y)(z + y)$$

$$P = x^3 b^2 + a^2 z^3 + a b z(x^2 + xy + y^2) - z y a b(z + y)$$

$$P = x^3 b^2 + a^2 z^3 + a b z x^2 + a b z x y + a b z y^2 - z^2 y a b - z y^2 a b$$

$$P = x^3 b^2 + a^2 z^3 + a b z x^2 + a b z y(x - z)$$

$$P = x^3 b^2 + a^2 z^3 + a b z x^2 + a b z y(a + b)$$

$$\text{منه : } P \geq 0 \text{ و هذا ينهي البرهان.}$$

لاحظ الدور الذي لعبه الوضعان $a = x - y$ و $b = y - z$ في استغلال المعطى $x \geq y \geq z$ ، فبدونهما الأمر جد معقد لكنه ممكن.

قد تكون هناك طرق أخرى لم أتوصل لها لحل التمرين.

تمرين 6 :

نضع : $x = \sqrt{a}$ و $y = \sqrt{b}$ و $z = \sqrt{c}$ ، إذن : $a \geq b \geq c \geq 0 \Rightarrow x \geq y \geq z \geq 0$

إذن حسب نتيجة التمرين السابق: $x^2 \frac{y}{z} + y^2 \frac{z}{x} + z^2 \frac{x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$

أي: $a\sqrt{\frac{b}{c}} + b\sqrt{\frac{c}{a}} + c\sqrt{\frac{a}{b}} \geq a + b + c$ ، بالتالي : $a\sqrt{\frac{b}{c}} + b\sqrt{\frac{c}{a}} + c\sqrt{\frac{a}{b}} \geq 1$

بدون التمرين السابق التمرين يعتبر صعبا للغاية. 🍋