السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات حلول مقترحة	سلسلة 1

التمارين مستخرجة من الكتاب المدرسي المفيد في الرياضيات-التحليل

تمرين 1 :

لدينا: $2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-1=0$

لدينا : $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2-2=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2$

نضع : $y=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ منه : $2(y^2-2)-3y-1=0$ منه : $2y^2-3y-5=0$

محددة هذه المعادلة هي : $\Delta=9+40=49$ منه: $y=\frac{3+7}{4}=\frac{5}{2}$ أو $y=\frac{3-7}{4}=-1$

منه : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=5$ أو $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=-2$

نضع مرة أخرى: $x=\frac{a}{b}$ ، منه : $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ أو $x+\frac{1}{x}=-1$

منه : $2x^2-5x+2=0$ أو $x^2+x+1=0$

بعد حل المعادلة الأولى نجد : $x=\frac{5+3}{4}=2$ أو $x=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$

أما المعادلة الثانية فلا حل لها (المحددة سالبة) ، بالتالـــــــي: $\frac{a}{b}=2$ أو $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$

تمرين 2 :

لدينا : $ab+bc+ca=1$ منه : $bc+ca=1-ab$

ولدينا :

$$\begin{aligned}(a^2+1)(b^2+1)&=a^2b^2+a^2+b^2+1=a^2b^2+1-2ab+a^2+b^2+2ab\\&=(1-ab)^2+(a+b)^2\\&=(bc+ca)^2+(a+b)^2\\&=(a+b)^2(c^2+1)\end{aligned}$$

منه : $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=(a+b)^2(c^2+1)^2$ منه : $\boxed{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}=(a+b)(c^2+1)}$

وحيث أن : a و b و c من Q فإن : $(a+b)(c^2+1)\in Q$ ، وهذا ينهي البرهان.

تمرين 3 :

لدينا : $\begin{cases}xy+2x-y=3\\2x^2y-xy^2=-4\end{cases}$ منه : $\begin{cases}2x-y=3-xy\\xy(2x-y)=-4\end{cases}$ منه : $\begin{cases}2x-y=3-xy\\xy(3-xy)=-4\end{cases}$

نضع: $t=xy$ منه : $t(3-t)=-4$ أي : $t^2-3t-4=0$ ، بعد حل المعادلة نجد : $t=4$ أو $t=-1$

منه : $\begin{cases}2x-y=3-4=-1\\xy=4\end{cases}$ أو $\begin{cases}2x-y=3+1=4\\xy=-1\end{cases}$

أي : $\begin{cases}y=2x+1\\xy=4\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=2x-4\\xy=-1\end{cases}$ أي $\begin{cases}y=2x+1\\x(2x+1)=4\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=2x-4\\x(2x-4)=-1\end{cases}$

أي $\begin{cases} y=2x+1 \\ 2x^2+x-4=0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} y=2x-4 \\ 2x^2-4x+1=0 \end{cases}$

حلا معادلة النظمة الأولى هما : $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ و $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ والثانية : $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

منه : $\begin{cases} y=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}+1=\frac{1+\sqrt{33}}{2} \\ x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4} \end{cases}$ أو $\begin{cases} y=\frac{-1-\sqrt{33}}{2}+1=\frac{1-\sqrt{33}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{33}}{4} \end{cases}$

أو $\begin{cases} y=2+\sqrt{2}-4=\sqrt{2}-2 \\ x=\frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ أو $\begin{cases} y=2-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-2 \\ x=\frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

خلاصة: $\boxed{S=\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4},\frac{1+\sqrt{33}}{2}\right);\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4},\frac{1-\sqrt{33}}{2}\right);\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}-2\right);\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}-2\right)\right\}}$

<u>تمرين 4</u> :

نضع : $S=\left[\frac{2}{k}\right]+\left[\frac{4}{k}\right]+......+\left[\frac{2(k-2)}{k}\right]+\left[\frac{2(k-1)}{k}\right]$

منه : $S=\left[\frac{2(k-1)}{k}\right]+\left[\frac{2(k-2)}{k}\right]+......+\left[\frac{4}{k}\right]+\left[\frac{2}{k}\right]$

نجمع : $2S=\left(\left[\frac{2(k-1)}{k}\right]+\left[\frac{2}{k}\right]\right)+\left(\left[\frac{2(k-2)}{k}\right]+\left[\frac{4}{k}\right]\right)+....$

لنبين أنه مهما تكن $1\le i\le k-1$ فإن : $\left[\frac{2(k-i)}{k}\right]+\left[\frac{2i}{k}\right]=1$

بالفعل : لدينا 3 حالات : $0<2i<k$ أو $2i=k$ أو $2i>k$

حالة ① : $0<2i<k$: إذن : $0\le\frac{2i}{k}<1$ منه : $\left[\frac{2i}{k}\right]=0$ ،ومن جهة أخرى:

$$0<2i<k\Rightarrow -2k<2i-2k<-k\Rightarrow 2k>2k-2i>k\Rightarrow 2>\frac{2(k-i)}{k}>1\Rightarrow\left[\frac{2(k-i)}{k}\right]=1$$

منه : $\left[\frac{2(k-i)}{k}\right]+\left[\frac{2i}{k}\right]=1$

حالة ② : $2i=k$: هذه الحالة غير ممكنة، لأن k عدد فردي

حالة ③ : $2i>k$

إذن : $\frac{2i}{k}>1$ وبما أن: $1\le i\le k-1$ فإن : $i<k$ منه $\frac{2i}{k}<2$ منه : $1<\frac{2i}{k}<2$ منه : $\left[\frac{2i}{k}\right]=1$

ومن جهة أخرى: $2i>k\Rightarrow 2i-2k>-k\Rightarrow 2(k-i)<k\Rightarrow\frac{2(k-i)}{k}<1$

وحيث أن : $\frac{2(k-i)}{k} \geq 0$ فإن : $0 \leq \frac{2(k-i)}{k} < 1$ ، منه : $\left[\frac{2(k-i)}{k}\right] = 1$

منه : $\left[\frac{2i}{k}\right] + \left[\frac{2(k-i)}{k}\right] = 1$ ، خلاصة: في جميع الحالات: $\left[\frac{2i}{k}\right] + \left[\frac{2(k-i)}{k}\right] = 1$

بالتالي: $2S = 1+1+1+....+1 = k-1$ بالتالي: $\boxed{S = \frac{k-1}{2}}$

تمرين 5 :

لدينا : $x^2 - 19[x] + 88 = 0$ ، نضع $[x] = k \in Z$ منه : $k \leq x < k+1$

منه : $x^2 - 19k + 88 = 0$ أي : $x^2 + 88 = 19k$ نستنتج إذن أن : $k > 0$

إذن : $k \leq x < k+1 \Rightarrow k^2 \leq x^2 < k^2 + 2k + 1 \Rightarrow k^2 \leq 19k - 88 < k^2 + 2k + 1$

منه : $\begin{cases} k^2 - 19k + 88 \leq 0 \\ 0 < k^2 - 17k + 89 \end{cases}$ ، محددة الحدودية $k^2 - 17k + 89$ سالبة وحيث أن معاملها موجب فهي دائما موجبة،

أي أن المتراجحة الثانية محققة

جذرا الحدودية : $k^2 - 19k + 88$ هما : 8 و 11

إذن: $8 \leq k \leq 11 \Leftrightarrow k^2 - 19k + 88 \leq 0$ ، منه : $k \in \{8,9,10,11\}$

عكسيا : $k = 8 \Rightarrow x^2 = 19k - 88 = 64 \Rightarrow (x = 8 \text{ ou } x = -8) \Rightarrow x = 8$ (لأن -8 لا يحقق المعادلة)

$k = 9 \Rightarrow x^2 = 19k - 88 = 83 \Rightarrow (x = \sqrt{83} \text{ ou } x = -\sqrt{83}) \Rightarrow x = \sqrt{83}$ (لأن $-\sqrt{83}$ لا يحقق المعادلة)

$k = 10 \Rightarrow x^2 = 19k - 88 = 107 \Rightarrow (x = \sqrt{107} \text{ ou } x = -\sqrt{107}) \Rightarrow x = \sqrt{107}$ (لأن $-\sqrt{107}$ لا يحقق المعادلة)

$k = 11 \Rightarrow x^2 = 19k - 88 = 121 \Rightarrow (x = 11 \text{ ou } x = -11) \Rightarrow x = 11$ (لأن -11 لا يحقق المعادلة)

خلاصة: $\boxed{S = \{8, \sqrt{83}, \sqrt{107}, 11\}}$

التحقق ضروري عكس التمرين الأول، لأننا لم نستعمل التكافؤ أثناء البرهان بل الاستلزام فقط، لذلك يجب التحقق من الاستلزام المعاكس

تمرين 6 :

لدينا : $\frac{x+1}{2} = \left[\frac{3x^2 - 2x + 1}{2}\right]$ ، نضع $\frac{x+1}{2} = k$ منه : $x = 2k - 1$ حيث $k \in Z$

نستنتج أن : $\frac{x+1}{2} \leq \frac{3x^2 - 2x + 1}{2} < \frac{x+1}{2} + 1$ (خاصية الجزء الصحيح : $\forall t \in IR \ [t] \leq t < [t] + 1$

منه : $x + 1 \leq 3x^2 - 2x + 1 < x + 3$ منه : $\begin{cases} 0 \leq 3x^2 - 3x \\ 3x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 0 \leq x(x-1) \\ 3x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases}$

محددة الحدودية : $3x^2 - 3x - 2$ هي : $\Delta = 9 + 24 = 33$

إذن جذرا هذه الحدودية هما : $x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{6} \approx 1{,}4$ و $x_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{6} \approx -0{,}4$

منه :

x	x_2		x_1
$3x^2-3x-2$	+	-	+

منه : $x_2 < x < x_1$ ومنه: $x_2 < 2k-1 < x_1$ وحيث أن : $x_1 \approx 1{,}4$ و $x_2 \approx -0{,}4$

فإن : $2k-1=1$ أو $2k-1=0$ أي : $k=1$ أو $k=\frac{1}{2} \notin Z$

بالتالي : $x=2k-1=1$

عكسيا ، نتحقق بسهولة أن : العدد 1 حل للمعادلة المقترحة : $\left[\frac{3\times 1^2-2\times 1+1}{2}\right]=[1]=1=\frac{1+1}{2}$

خلاصة : $\boxed{S=\{1\}}$