بتاريخ : 2015/01/30 02:20 م

01.

نحسب النهايات التالية :

.1

- $\lim_{x\to 3} x^4 - x^3 + 7 = 3^4 - 3^3 + 7 = 115$
- $\lim_{x\to -\infty} 2x^5 - 7x^4 + x^2 + 1 \lim_{x\to -\infty} 2x^5 = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \left(-3x^3+1\right)^4 \left(2x-5\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(-3x^3\right)^4 \times \left(2x\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(-3\right)^4 x^{13} = +\infty$

.2

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - x + 6}{2 - x^7} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{-x^7} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{3}{x^5} = 0$
- $\lim_{x\to \sqrt{5}} \frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5} = \lim_{x\to \sqrt{5}} \frac{x-\sqrt{5}}{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)} = \lim_{x\to \sqrt{5}} \frac{1}{\left(x+\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$
- $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^4} - x^3 = +\infty$ لأن : $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$ و $\lim_{x\to -\infty} - x^3 = +\infty$
- $\lim_{x\to 3^+} \frac{3-x}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^+} \frac{3-x}{\left(x-3\right)\left(x+3\right)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-1}{x+3} = \frac{-1}{6}$
- $\lim_{x\to 7^-} \frac{x+2}{x-7} = -\infty$ لأن $\lim_{x\to 7^-} x+2 = 9$ و $\lim_{x\to 7^-} x-7 = 0^-$
- $\lim_{x\to 4} \frac{3-x}{\left(x-4\right)^6} = -\infty$ لأن $\lim_{x\to 4} 3-x = -1$ و $\lim_{x\to 4} \left(x-4\right)^6 = 0^+$

.3

- $\lim_{x\to +\infty} 2x - |4-x| = \lim_{x\to +\infty} 2x - \left(x-4\right) = \lim_{x\to +\infty} x+4 = +\infty$ لأن $|4-x| = -\left(4-x\right)$ و $x\to +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{|4-2x|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{4-2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-2x} = -\frac{1}{2}$ لأن $|4-2x| = 4-2x$ و $x\to -\infty$

02.

أحسب النهايات التالية :

.1

- $\lim_{x\to +\infty} 5x - 3 + \sqrt{\frac{3x+6}{x-1}} = +\infty$ لأن $\lim_{x\to +\infty} 5x-3 = +\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{3x+6}{x-1}} = \sqrt{3}$ (لأن $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x+6}{x-1} = 3$) .
- $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{\left(x-5\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\left(x-5\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \frac{1}{4}$

- $$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}=\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{\sqrt{4-x^2}\times\sqrt{4-x^2}}{(x-2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)}=\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{4-x^2}{(x-2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)}=\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)}=\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{-(2+x)}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)}=-\infty$$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}-(2+x)=-4$ و $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\sqrt{4-x^2}=0^+$.

- $$\lim_{x\to-\infty}2x+\sqrt{9x^2-18x}=\lim_{x\to-\infty}2x+|x|\sqrt{9-\frac{18}{x}}=\lim_{x\to-\infty}x\left(2-\sqrt{9-\frac{18}{x}}\right)=+\infty$$

(لأن $|x|=-x$ و $x\to-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{9-\frac{18}{x}}\right)=2-3=-1$).

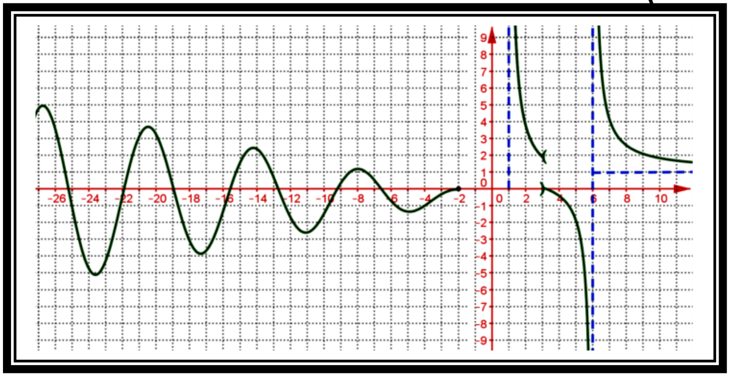
- $$\lim_{x\to+\infty}3x-\sqrt{9x^2-18x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x-\sqrt{9x^2-18x}\right)\left(3x+\sqrt{9x^2-18x}\right)}{3x+\sqrt{9x^2-18x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-\left(9x^2-18x\right)}{3x+\sqrt{9x^2-18x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{18x}{3x+\sqrt{9x^2-18x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{18x}{3x+|x|\sqrt{9-\frac{18}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{18x}{x\left(3+\sqrt{9-\frac{18}{x}}\right)}=\frac{18}{6}=3$$

(لأن $|x|=x$ و $x\to+\infty$)

.2

- $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{7x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{x}\times\frac{x}{7x}=4\times\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$$
- $$\lim_{x\to0}\frac{3x}{\tan(5x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan(5x)}\times3=\frac{1}{5}\times3=\frac{3}{5}$$
- $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(9x)}{\tan(4x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(9x)}{x}\times\frac{x}{\tan(4x)}=9\times\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$
- $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\sin x\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\sin x\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$$
- $$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}\left(t=\sqrt{x};x\to0^+\Rightarrow t\to0^+\right)$$.
- $$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$



.03

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .

.1 حدد مبيانيا D_f مجموعة تعريف الدالة f .

مبيانيا لدينا : $D_f=]-\infty,-2]\cup]1,3[\cup]3,6[\cup]6,+\infty[$

.2 استنتج مبيانيا نهايات f عند محدات D_f وكذلك في 1 .

- f ليس لها نهاية عند $-\infty$
- $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$ و $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to 6^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to 6^+} f(x) = +\infty$ و
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

04.

1. حدد m علما أن f لها نهاية في 3 حيث f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = mx + \dfrac{x^2-9}{x-3} & ; x > 3 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & ; x < 3 \end{cases}$$

نحدد نهاية f على يمين 3

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} mx + \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} mx + \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} mx + x + 3 = 3m+6$$

ومنه : $\ell_d = 3m+6$

نحدد نهاية f على يسار 3

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \frac{1}{4}$$

ومنه : $\ell_g = \frac{1}{4}$

لكي تكون للدالة لها نهاية في 3 يجب أن يكون $\ell_d = \ell_g \Leftrightarrow 3m+6 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{23}{12}$

خلاصة : f لها نهاية في 3 يجب أن تكون $m = -\frac{23}{12}$

05.

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2+\cos x}{1+x^2}$.

1. بين أن : $\dfrac{x^2-1}{1+x^2} \le f(x) \le 1$.

- لدينا :

$$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow x^2 - 1 \le x^2 \cos x \le x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1}\left(x^2-1\right) \le \frac{1}{x^2+1}\left(x^2+\cos x\right) \le \frac{1}{x^2+1}\left(x^2+1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1}\left(x^2-1\right) \le \frac{1}{x^2+1}\left(x^2+\cos x\right) \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1} \le f(x) \le 1$$

ومنه : $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \le f(x) \le 1$

2. استنتج النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos x}{1+x^2}$.

من خلال ما سبق : $\frac{x^2-1}{x^2+1}\leq f(x)\leq 1$ إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

3. أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}$.

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}}}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)}{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}}}}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\quad ;\ \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^7}=0\right)$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}=\frac{1}{2}$