



I. متجهات الفضاء :

01. تمديد مفهوم متجهة في المستوى للفضاء :

1. مفهوم متجهة في الفضاء :

- في المستوى ، متجهة \overrightarrow{AB} معرفة ب :
 - اتجاه \overrightarrow{AB} هو المستقيم (AB)
 - منحى \overrightarrow{AB} هو المنحى من A إلى B
 - طول \overrightarrow{AB} (أو منظم \overrightarrow{AB}) هي المسافة AB و نكتب $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.
- هذا المفهوم نمدده للفضاء (\mathcal{E}) وكذلك جميع خاصيات المتجهات في المستوى تبقى صالحة في الفضاء (\mathcal{E}) .

2. مثال :

- حالة $A = B$ المتجهة $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (ليس لها اتجاه ومنظمها منعدم وتسمى المتجهة المنعدمة)
- نقول إن متجهتين متساويتان إذا كان لهما اتجاهين متوازيين و نفس المنحى و نفس المنظم .
- ABCD رباعي في (\mathcal{E}) هو متوازي أضلاع يكافئ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

02. الحساب المتجهي في الفضاء مجموع متجهتين و جداء متجهة في عدد حقيقي :

1. ملحوظة :

مجموع متجهتين و جداء متجهة في عدد حقيقي معرفتين كما عرفنا في المستوى و لهما نفس الخاصيات .

2. مثال :

- $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- علاقة شال : $\forall A, B, C \in (\mathcal{E}) : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- مقابل المتجهة \vec{u} هي المتجهة التي لها نفس اتجاه \vec{u} و نفس منظم \vec{u} و منحناها عكس منحى المتجهة \vec{u} و نرسم لها ب $-\vec{u}$.
- المتجهة $\vec{v} = k\vec{u}$
 - لها نفس منحى المتجهة \vec{u} إذا كان $k > 0$. ولها عكس منحى المتجهة \vec{u} إذا كان $k < 0$
 - منظم المتجهة \vec{v} يحقق ما يلي $\|\vec{v}\| = |k| \|\vec{u}\|$
- لكل متجهة \vec{u} نضع $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$. لكل عدد حقيقي k نضع $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

1. خاصيات :

- لكل متجهتين \vec{u} و \vec{v} و لكل عددين حقيقيين k و k' :
 - $(k+k') \cdot \vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ ؛ $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ (2)
 - $k(k' \cdot \vec{u}) = k'(k\vec{u}) = (k \times k') \cdot \vec{u}$ (3) ؛ $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ (4)
 - $k \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$ (5)

II. استقامية متجهتين - التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء .

01. استقامية متجهتين - استقامية 3 نقط :

1. تعريف :

\vec{u} و \vec{v} متجهتان مستقيمتان إذا وجد α من \mathbb{R} حيث $\vec{u} = k\vec{v}$ أو $\vec{v} = k\vec{u}$ (أي إحداهما تكتب كجداء الأخرى و عدد حقيقي) .



2. ملحوظة :

- المتجهة المنعدمة مستقيمة مع جميع متجهات الفضاء.
- $\vec{u} = \overline{AB}$ و $\vec{v} = \overline{CD}$ متجهتان غير منعدمتين .
- $\vec{u} = \overline{AB}$ و $\vec{v} = \overline{CD}$ مستقيمتان تكافئ. $(CD) \parallel (AB)$
- A و B و C نقط من الفضاء مستقيمة يكافئ $\vec{u} = \overline{AB}$ و $\vec{v} = \overline{AC}$ إحداهما تكتب بدلالة الأخرى .

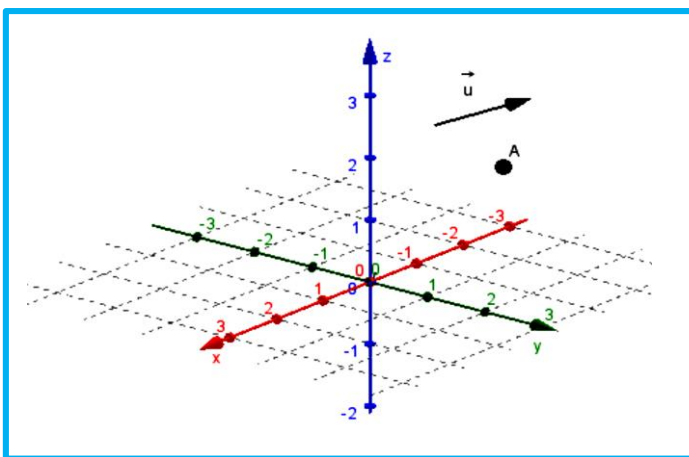
02. التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء :

1. تعريف - خاصة :

- لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء (E).
 - كل متجهة \vec{u} غير منعدمة و مستقيمة مع المتجهة \overline{AB} تسمى متجهة موجهة للمستقيم (AB).
 - مجموعة النقط M من الفضاء (E) التي تحقق $\overline{AM} = \alpha \vec{u}$ حيث α من \mathbb{R} هي المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة \vec{u}
- نرمز له ب: $D(A, \vec{u}) = \{M \in (E) / \overline{AM} = \alpha \vec{u}; \alpha \in \mathbb{R}\}$ ومنه:

2. مثال :

- لتكن A نقطة من الفضاء و \vec{u} متجهة غير منعدمة. (أنظر الشكل أسفله)
- أنشئ المستقيم $D(A, \vec{u})$.



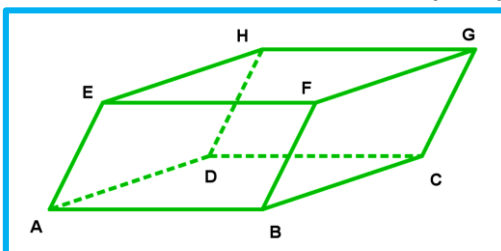
III. المتجهات المستوائية - تحديد متجهي لمستوى في الفضاء :

01. المتجهات المستوائية:

1. مبرهنة و تعريف:

- نقول إن أربع نقط A و B و C و D من الفضاء مستوائية إذا كانت تنتمي لنفس المستوى
- نقول إن ثلاث متجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} من الفضاء (E) مستوائية إذا وفقط إذا وجدت أربع نقط مستوائية A و B و C و D حيث :
 $\vec{u} = \overline{AB}$ و $\vec{v} = \overline{AC}$ و $\vec{w} = \overline{AD}$

2. مثال: ABCDEFGH متوازي المستطيلات أوجد ثلاث متجهات مستوائية ثم أخرى غير مستوائية .



- المتجهات : $\vec{u} = \overline{AB}$ و $\vec{v} = \overline{DG}$ و $\vec{w} = \overline{DH}$
- لدينا : $\vec{u} = \overline{AB} = \overline{DC}$ و $\vec{v} = \overline{DG}$ و $\vec{w} = \overline{DH}$
- ونعلم أن النقط D و C و G و H مستوائية .
- ومنه المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية .

3. ملحوظة :

- إذا كانت متجهتين من بين \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستقيمتين فإن المتجهات الثلاث مستوائية .
- $\vec{u} = \overline{AB}$ و $\vec{v} = \overline{DC}$ و $\vec{w} = \overline{DE}$ مستوائية لا يعني أن النقط A و B و C و D و E مستوائية .



4. مثال :

المتجهات : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ و $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ هي مستوائية لأن : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ مستقيمة و لكن النقط A و B و D و E و F غير مستوائية (لأن النقطة D لا تنتمي إلى المستوى المحدد بالنقط A و B و E و F).

02. تحديد متجهي لمستوى في الفضاء :

1. مبرهنة و تعريف :

- كل مستوى (P) في الفضاء (\mathcal{E}) يحدد بنقطة A من (\mathcal{E}) و متجهين \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين من (\mathcal{E}) ؛ \vec{u} و \vec{v} تسميان متجهتان موجھتان للمستوى و نرسم له ب : $(P) = P(A, \vec{u}, \vec{v})$
- مجموعة النقط M من الفضاء (\mathcal{E}) التي تحقق ما يلي : $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ هي المستوى (P) المار من A والموجه بالمتجهين \vec{u} و \vec{v} و نرسم له ب : $P = P(A, \vec{u}, \vec{v})$. ومنه : $P = P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in (\mathcal{E}) / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} / x, y \in \mathbb{R}\}$

2. ملحوظة :

\vec{u} و \vec{v} و \vec{w} ثلاث متجهات من الفضاء (\mathcal{E})

• \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية إذا فقط كتبت إحدى المتجهات الثلاث بدلالة المتجهتين المتبقيتين .

أو أيضا : \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية يكافئ $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ $\exists x, y \in \mathbb{R}$

مثلا : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}$ (كتبت بدلالة \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AD}) . مثلا : $\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BD}$ (كتبت بدلالة \overrightarrow{BA} و \overrightarrow{BD}) .

• المتجهة المنعدمة مستوائية مع كل متجهتين من الفضاء .

3. تمرين :

لنعتبر النقط A و B و C و D و E من الفضاء (\mathcal{E}) حيث : $2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} - 5\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ (1) .

1. بين أن : A و B و C و D مستوائية .

جواب :

لدينا :

$$(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} - 5\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA} + 4(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) - 5(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$$

ومنه : $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$ أي المتجهة \overrightarrow{AD} كتبت بدلالة المتجهين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC}

إذن المتجهات \overrightarrow{AD} و \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} مستوائية ومنه : النقط A و B و C و D مستوائية .

خلاصة : النقط A و B و C و D مستوائية .

IV. توازي في الفضاء :

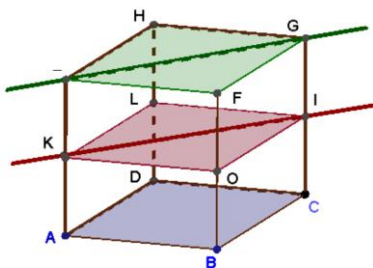
01. المستقيمتان المتوازيتان :

1. تعريف :

$D(A, \vec{u})$ و $\Delta(B, \vec{v})$ مستقيمان من الفضاء .

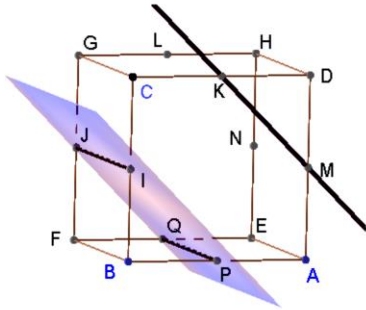
$$\Delta(B, \vec{v}) \parallel D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow (\vec{v} \text{ و } \vec{u} \text{ مستقيمتين})$$

$$\Delta(B, \vec{v}) \parallel D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha\vec{u} ; \alpha \in \mathbb{R}^*$$



02. المستقيمات و المستويات المتوازية :

1. تعريف :



$D(A, \vec{u})$ مستقيم و $P(B, \vec{v}, \vec{w})$ مستوى من الفضاء

يكون المستقيم $D(A, \vec{u})$ موازيا للمستوى $P(B, \vec{v}, \vec{w})$

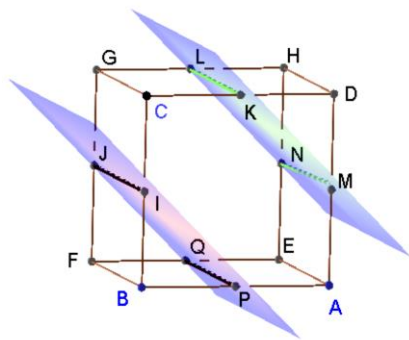
إذا وفقط إذا كانت المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية .

أو أيضا :

$$D(A, \vec{u}) \parallel P(B, \vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} / x, y \in \mathbb{R}$$

03. المستويات المتوازية :

1. تعريف :



$P(A, \vec{u}, \vec{v})$ و $Q(B, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ مستويان متوازيان من الفضاء

إذا وفقط إذا كانت المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{u}_1 مستوائية وكذلك \vec{u} و \vec{v}

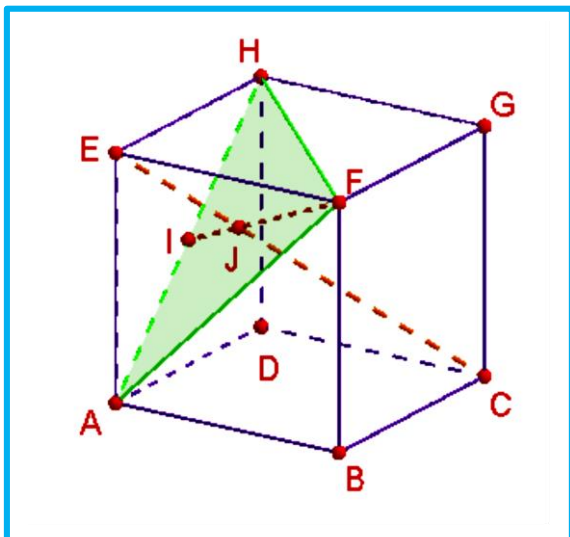
و \vec{u}_2 مستوائية .

أو أيضا :

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) \parallel Q(B, \vec{u}_1, \vec{v}_1) \Leftrightarrow (\vec{u}_1 = x\vec{v} + y\vec{w} / x, y \in \mathbb{R} \text{ و } \vec{u}_2 = x'\vec{v} + y'\vec{w} / x', y' \in \mathbb{R})$$

03. تمرين :

ABCDEFHG مكعب لتكن I منتصف [AH] و J نقطة من [FI] حيث $\vec{FJ} = \frac{2}{3}\vec{FI}$.



1. أنشئ الشكل .

2. بين ان $\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$.

3. بين أن : $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$

4. ماذا يمكن أن نستنتج بالنسبة للنقط E و J و C .

جواب :

1. ننشئ الشكل .

2. نبين أن : $\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$

لدينا :

$$\vec{EC} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$= -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD} ; (\vec{BC} = \vec{AD})$$



خلاصة : $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

3. نثبت أن : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{EJ} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ} \\
 &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FI} \\
 &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI}) \\
 &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right) \\
 &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH})\right) \\
 &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \\
 &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \\
 &= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad (\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}) \\
 &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\
 &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}) \\
 &= \frac{1}{3}\overrightarrow{EC} ; (\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})
 \end{aligned}$$

ومنه : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ و بالتالي المتجهتين \overrightarrow{EJ} و \overrightarrow{EC} مستقيمتين .

خلاصة : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

4. استنتاج للنقط E و J و C .

بما أن : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ فإن المتجهتين \overrightarrow{EJ} و \overrightarrow{EC} مستقيمتين و منه النقط E و J و C مستقيمية .

خلاصة : النقط E و J و C مستقيمية .



Michel Chasles
(1793 - 1880)