

تمرين 1

Exercise 1

لدينا : $(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x - 2)$ أي : $(x - 2)(x - 4)P(x) = x(x + 2)P(x - 2)$

إذن : $8P(0) = 0$ منه : $P(0) = 0$

وأيضا : $24P(-2) = 0$ أي : $P(-2) = 0$

إذن : 0 و -2 جذران للحدودية $P(x)$ إذن توجد حدودية $Q(x)$ حيث : $P(x) = x(x + 2)Q(x)$

منه : $P(x - 2) = (x - 2)xQ(x - 2)$

نعوض في العلاقة المعطاة فنجد : $(x - 2)(x - 4)x(x + 2)Q(x) = x^2(x + 2)(x - 2)Q(x - 2)$

منه : $(x - 4)Q(x) = xQ(x - 2)$

إذن : $Q(0) = 0$ و $Q(2) = 0$ منه : $Q(0) = Q(2) = 0$ إذن 0 و 2 جذران للحدودية $Q(x)$

إذن توجد حدودية $H(x)$ حيث : $Q(x) = x(x - 2)H(x)$

نعوض من جديد فنجد : $(x - 4)x(x - 2)H(x) = x(x - 2)(x - 4)H(x - 2)$ منه : $H(x) = H(x - 2)$

الآن باعتبار الحدودية : $G(x) = H(x) - H(0)$

سنستنتج أن : $G(x - 2) = H(x - 2) - H(0) = H(x) - H(0) = G(x)$

أكثر من ذلك: سنجد أن : $G(0) = 0$ منه : $G(2) = G(0) = 0$ و $G(4) = G(2) = 0$ و $G(6) = G(4) = 0$ و ... $G(2n) = 0$

حيث $n \in \mathbb{N}$ يمكننا استعمال برهان بالترجع لدقة أكثر في الجواب

إذن الحدودية $G(x)$ تقبل عددا غير منته من الجذور وهذا لا يمكن إلا إذا كانت هي الحدودية المنعدمة.

بالتالي: $H(x) = H(0)$ ، إذن وبوضع : $H(0) = a$ سنستنتج أن : $P(x) = ax^2(x^2 - 4)$

عكسيا نتحقق بسهولة أن كل حدودية من الشكل $ax^2(x^2 - 4)$ حيث $a \in \mathbb{R}$ تحقق شرط المسألة

خلاصة: الدوال الحدودية التي تجيب عن السؤال هي كل الدوال على الشكل : $P(x) = ax^2(x^2 - 4)$ حيث $a \in \mathbb{R}$

استعملنا المحددة لتعميل الحدودية : $x^2 - 6x + 8$ قصد استغلال جذورها في المسألة (الاختزال ...)

يمكننا الاختزال عندما يتعلق الأمر بالحدوديات لأننا في الحقيقية نختزل بحدودية وليس بعدد (لذلك ليس هناك حاجة لدراسة الحالات

مثلا عندما نريد الاختزال بـ $x - 2$ لن ندرس حالة $x = 2$ وحالة $x \neq 2$)

معلومة مهمة في هذا التمرين: للبرهان أن حدودية منعدمة نبرهن أن لها عدد لا منتهيا من الجذور

لتكن x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً، نضع: $a = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ و $b = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$

$$m = \min\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}; \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) \text{ و}$$

$$\text{لدينا: } (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = 3 + a + b$$

$$a^2 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 2\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 2b \text{ و}$$

$$b^2 = \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} + 2a \text{ و}$$

■ إذا كان $a \leq b$ فإن: $m = a$ ، ومنه:

$$m^2 - (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = a^2 - (3+a+b) = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 2b - 3 - a - b = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} - 3\right) + (b-a)$$

$$\text{و بما أن: } b-a \geq 0 \text{ و } \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq 3 \text{ أي: } \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq 3\sqrt{\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y^2}{z^2} \cdot \frac{z^2}{x^2}} \text{ فإن: } m^2 \geq (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

■ إذا كان $b < a$ فإن: $m = b$ ، ومنه:

$$m^2 - (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = b^2 - (3+a+b) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} + 2a - 3 - a - b = \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} - 3\right) + (a-b)$$

$$\text{و بما أن: } a-b > 0 \text{ و } \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} \geq 3 \text{ فإن: } m^2 > (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

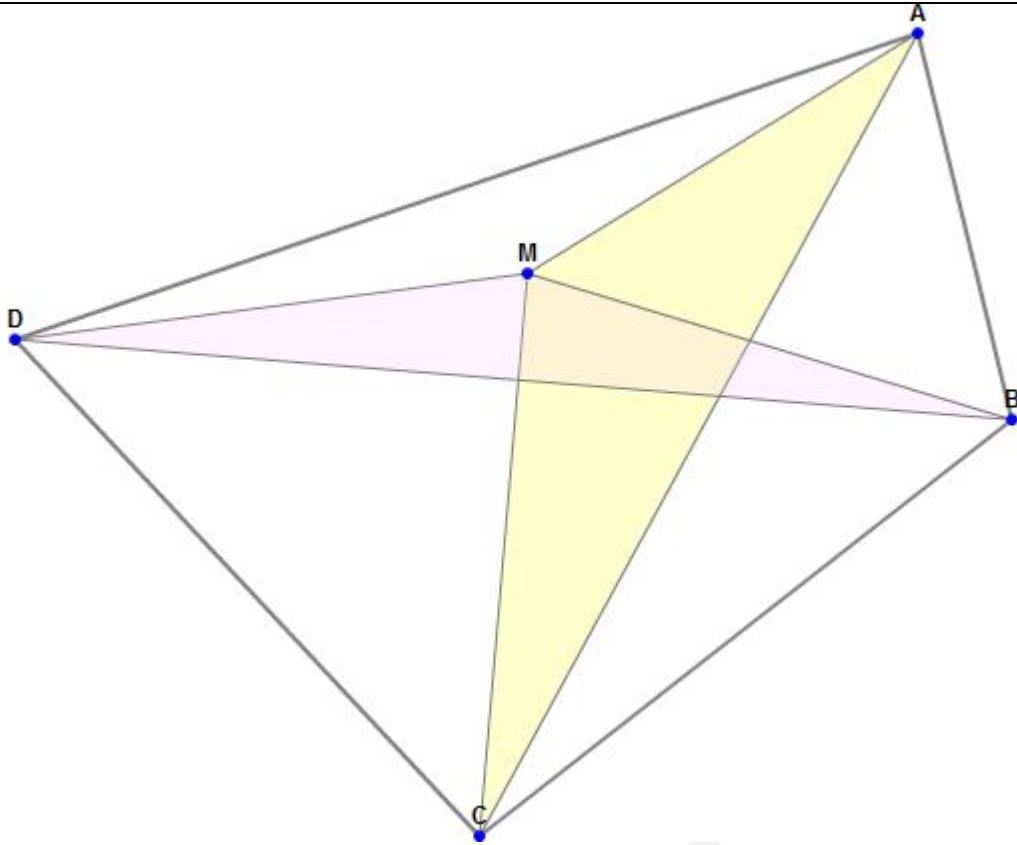
حسب الحالتين المدرستان ف $m^2 - (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 0$ تتحقق إذا وفقط إذا كان:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} - 3 = 0 \\ a - b = 0 \\ b < a \end{array} \right. \text{ (هذه الحالة غير ممكنة) } \quad \text{أو} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} - 3 = 0 \\ b - a = 0 \\ a \leq b \end{array} \right.$$

$$\text{أي: } a = b \text{ و } \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = 3 \text{، هذه المتساوية الأخيرة نعلم أنها تتحقق إذا وفقط إذا كان: } \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2}{z^2} = \frac{z^2}{x^2} = 1$$

بالتالي التساوي يتحقق إذا وفقط إذا كان $x = y = z$

عند فصل الحالات يجب أن لا ندرج في حالة ثانية حالة سابقة، لذلك في الحالة الثانية أخذنا $b < a$ وليس $b \leq a$ ، قد تم قبول ذلك تجاوزاً، لكن الدقة الرياضية تستوجب هذا التفصيل.



$$\frac{\frac{1}{2} \sin(\widehat{AMC}) \times MA \times MC}{\frac{1}{2} \sin(\widehat{BMD}) \times MB \times MD} = \frac{\frac{\sin(\widehat{AMC})}{\cos(\widehat{AMC})}}{\frac{\sin(\widehat{BMD})}{\cos(\widehat{BMD})}} : \text{يعني } \frac{S(AMC)}{S(BMD)} = \frac{\tan(\widehat{AMC})}{\tan(\widehat{BMD})} : \text{لدينا}$$

$$\frac{MA \times MC}{MB \times MD} = \frac{\frac{1}{\cos(\widehat{AMC})}}{\frac{1}{\cos(\widehat{BMD})}} \text{ بما أن } 0^\circ < \widehat{AMC} < 180^\circ \text{ لكون } M \text{ لا تنتمي لأي قطر من قطري الرباعي فإن}$$

$$\text{منه : } MB \times MD \times \cos(\widehat{BMD}) = MA \times MC \times \cos(\widehat{AMC})$$

ولدينا حسب مبرهنة الكاشي في المثلثين AMC و BMD :

$$BD^2 = MB^2 + MD^2 - MB \times MD \times \cos(\widehat{BMD}) \quad \text{و} \quad AC^2 = MA^2 + MC^2 - MA \times MC \times \cos(\widehat{AMC})$$

من هذه المتساويات الثلاث نستنتج أن : $MA^2 + MC^2 - AC^2 = MB^2 + MD^2 - BD^2$

$$\text{بالتالي : } AM^2 + MC^2 + BD^2 = AC^2 + BM^2 + MD^2$$

🌱 لتمارين سهل رغم صعوبة المتساوية المراد البرهان عنها، لأنه بتتبع المعطيات نصل مباشرة للنتيجة دون مجهود يذكر.

الحلول المقترحة هي حلول شخصية وليست حلولاً رسمية