السنة الأولى علوم رياضية

أولمبياد الرياضيات 2016

الفرض الرابع

الجمعة 23 يناير 2015

السنة الدراسية: 2015/2014

(مدة الإنجاز 3 ساعات و نصف)

Exercise 1 (HEL.MS)

Trouver tous les polynômes $P(x)$ à coefficients réels qui vérifient la relation suivante :

$$(x^2-6x+8)P(x)=(x^2+2x)P(x-2)$$

تمرين 1

أوجد جميع الحدوديات $P(x)$ التي معاملاتها أعداد حقيقية و تحقق العلاقة التالية :

$$(x^2-6x+8)P(x)=(x^2+2x)P(x-2)$$

Exercise 2 (Crech & Slovac MO)

Soient x, y et z trois nombres réels strictement positif et $m=\min\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\,;\,\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)$.

Montrer que : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le m^2$.

pour quelles valeurs de x, y et z l'égalité a lieu ?

N.B: On note par $\min(a\,;\,b)$ la plus petite valeur de a et b

تمرين 2

لتكن x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا.

و $m=\min\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\,;\,\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)$

بين أن : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le m^2$

متى يكون التساوي ؟

ملحوظة : نرمز بـ $\min(a\,;\,b)$ لأصغر العددين a و b

Exercise 3 (Bellar MO)

Soient M un point situé à l'intérieur d'un quadrilatère $ABCD$ convexe de sorte que le rapport des aires des triangles AMC et BMD est égale au rapport des tangentes des angles $[A\hat{M}C]$ et $[B\hat{M}D]$;

(i.e : $\frac{S(AMC)}{S(BMD)}=\frac{\tan(A\hat{M}C)}{\tan(B\hat{M}D)}$)

Montrer que si M n'appartient à aucun des diagonales du quadrilatère, alors

$$AM^2+MC^2+BD^2=AC^2+BM^2+MD^2$$

N.B: On note par $S(XYZ)$ l'aire du triangle XYZ

تمرين 3

لتكن M نقطة داخل رباعي محدب $ABCD$ بحيث نسبة مساحتي المثلثين AMC و BMD تساوي نسبة ظلي الزاويتين $[A\hat{M}C]$ و $[B\hat{M}D]$، (يعني $\frac{S(AMC)}{S(BMD)}=\frac{\tan(A\hat{M}C)}{\tan(B\hat{M}D)}$)

بين أنه إذا كانت M لا تنتمي لأي قطر من قطري الرباعي فإن

$$AM^2+MC^2+BD^2=AC^2+BM^2+MD^2$$

ملحوظة : نرمز لمساحة المثلث XYZ بـ $S(XYZ)$