السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات 2015 الفرض الثالث الجمعة 14 فبراير 2014 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2014/2013

تمرين 1 — Exercise 1

لدينا : p و q عددين صحيحين طبيعيين مختلفين إذن $|p-q| \neq 0$

و بما أنهما أوليان أكبر من 2، إذن فهما فرديان معا و بذلك يكون فرقهما زوجيا ، إذن : $|p-q| \geq 2$

منه :

$$\left(\sqrt{pq}\left|\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right|\right)^2 = \frac{\left(p^2-q^2\right)^2}{pq} = \frac{(p-q)^2(p+q)^2}{pq} = (p-q)^2\left(\frac{(p-q)^2+4pq}{pq}\right) = \frac{(p-q)^4}{pq}+4|p-q|^2$$

إذن:

$$\begin{cases} \dfrac{(p-q)^4}{pq} > 0 \\ 4|p-q|^2 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{pq}\left|\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right|\right)^2 > 16 \Rightarrow \sqrt{pq}\left|\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right| > 4 \Rightarrow \left|\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right| > \frac{4}{\sqrt{pq}}$$

تمرين 2 — Exercise 2

نعتبر النظمة : $(x;y)\in Z^2$ $\quad (S):\ \begin{cases} x^2+11 = y^4 - xy \\ y^2+xy = 30 \end{cases}$

$$(S) \Rightarrow y(y+x) = 30 \Rightarrow (y, y+x) \in \begin{Bmatrix} (1,30);(2,15);(3,10);(-1,-30);(-2,-15);(-3,-10); \\ (30,1);(15,2);(10,3);(-30,-1);(-15,-2);(-10,-3) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow (y,x) \in \begin{Bmatrix} (1,29);(2,13);(3,7);(-1,-29);(-2,-13);(-3,-7); \\ (30,-29);(15,-13);(10,-7);(-30,29);(-15,13);(-10,7) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow (x,y) \in \begin{Bmatrix} (29,1);(13,2);(7,3);(-29,-1);(-13,-2);(-7,-3); \\ (-29,30);(-13,15);(-7,10);(29,-30);(13,-15);(7,-10) \end{Bmatrix}$$

و بالتعويض في المعادلة الأولى نتحقق أن الأزواج التي تحقق النظمة هي فقط : $S = \{(7,3);(-7,-3)\}$

يمكن استنتاج بعض المعلومات عن المجهولين مثل فردية العدد x ، لكنها لن تكون مفيدة، فقط يمكن استنتاج بعض التأطيرات المفيدة في اختيار الحلول، لكن مادام عدد الحلول الممكنة عددا محدودا فالأفضل التعويض فقط.

تمرين 3 — Exercise 3

نعتبر : $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c} = \dfrac{3}{a+b+c} \quad (*)$

$$(*) \Leftrightarrow (a+2b+c)(a+b+c) = 3(a+b)(b+c)$$

$$(*) \Leftrightarrow a^2+ab+ac+2ab+2b^2+2bc+ac+bc+c^2 = 3\left(ab+ac+b^2+bc\right)$$

$$(*) \Leftrightarrow a^2+2b^2+c^2+3ab+2ac+3bc = 3ab+3ac+3b^2+3bc$$

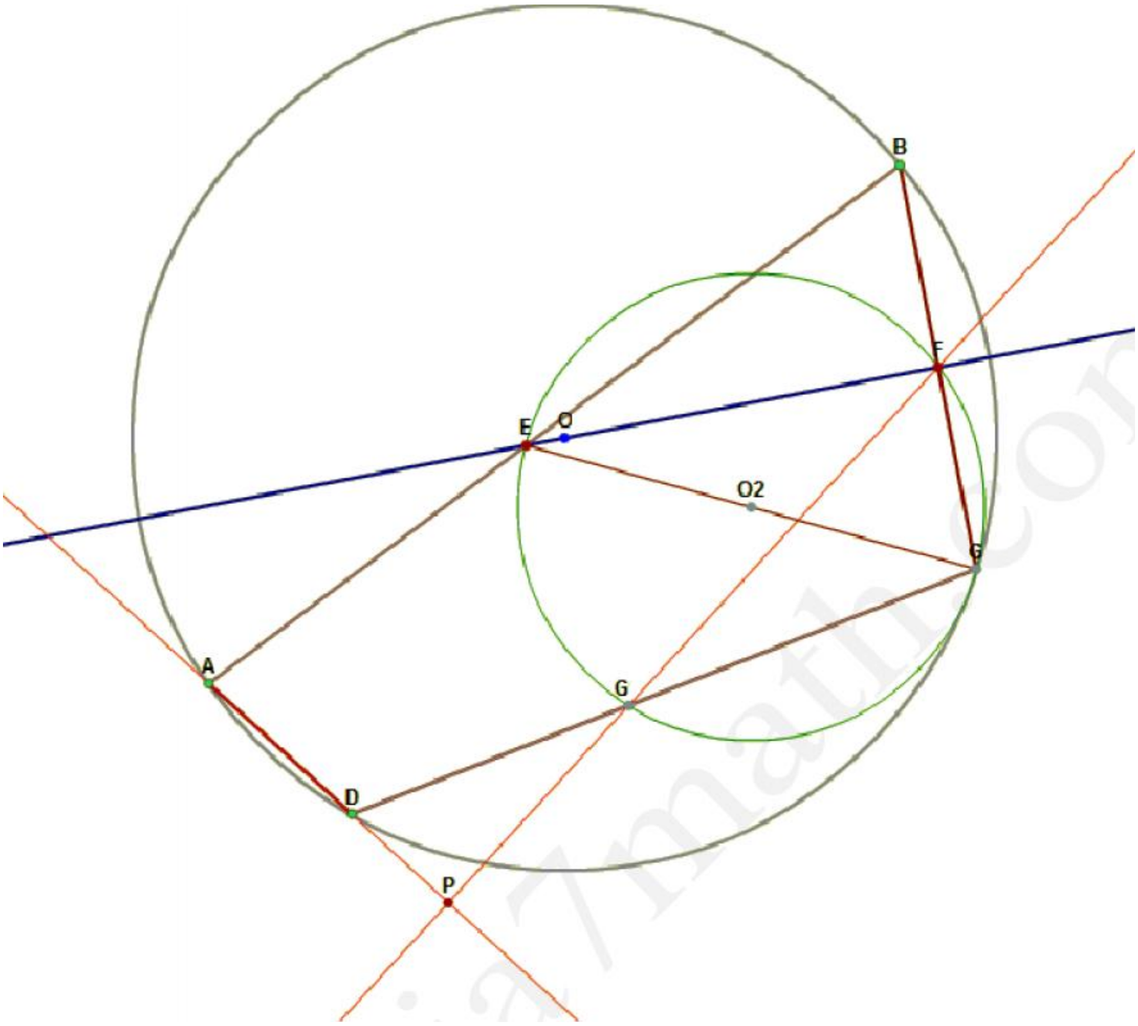
$$(*) \Leftrightarrow a^2+c^2-b^2 = ac$$

و نعلم حسب مبرهنة الكاشي أن : $\cos(\hat{B}) = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ، إذن: $(*) \Leftrightarrow \cos(\hat{B}) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 60°$

انظر أيضا أولمبياد النجاح 4 (التمرين 4) حيث يتضمن تمرينا مشابها.

Exercise 4

تمرين 4



لدينا $ABCD$ رباعي دائري ، إذن : $A\hat{D}C + A\hat{B}C = 180°$ و بما أن : $A\hat{D}C + P\hat{D}G = 180°$

فإن : $P\hat{D}G = A\hat{B}C$

و لدينا $D\hat{G}P = F\hat{G}C$ (زاويتان متقابلتان بالرأس)

و $F\hat{G}C = F\hat{E}C$ (زايتان محيطيتان تحصران نفس القوس)

و $F\hat{E}C = B\hat{E}F$ (لأن في المثلث المستوي الساقين يكون واسط القاعدة هو أيضا منصف الرأس)

إذن : $D\hat{G}P = B\hat{E}F$

إذن المثلثان BEF و DGP متقايسان ، بالتالي $D\hat{P}G = B\hat{F}E = 90°$ ، أي $(AD) \perp (FG)$