السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات 2015 الفرض الثاني الجمعة 22 نونبر 2013 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2014/2013

تمرين 1 — Exercise 1

لدينا : $(E):\ y=2x^2+5xy+3y^2$

$$y=2x^2+5xy+3y^2 \Leftrightarrow 2x^2+5xy+3y^2-y=0 \Leftrightarrow 4x^2+10xy+6y^2-2y=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x+\frac{5}{2}y\right)^2-\frac{25}{4}y^2+6y^2-2y=0 \Leftrightarrow (4x+5y)^2-25y^2+24y^2-8y=0$$

$$\Leftrightarrow (4x+5y)^2-y^2-8y=0 \Leftrightarrow (4x+5y)^2-\left(y^2+8y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (4x+5y)^2-\left((y+4)^2-16\right)=0 \Leftrightarrow (4x+5y)^2-(y+4)^2=-16$$

$$\Leftrightarrow (4x+6y+4)(4x+4y-4)=-16 \Leftrightarrow (2x+3y+2)(x+y-1)=-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y+2=a \\ x+y-1=b \end{cases} /(a,b)\in\{(1;-2);(-1;2);(2;-1);(-2;1)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3b+3-3x=a-2 \\ y=b+1-x \end{cases} /(a,b)\in\{(1;-2);(-1;2);(2;-1);(-2;1)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3b-a+5 \\ y=b+1-x \end{cases} /(a,b)\in\{(1;-2);(-1;2);(2;-1);(-2;1)\}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)\in\{(-2;1);(12;-9);(0;0);(10;-8)\}$$

بالتالي : $S=\{(-2;1);(12;-9);(0;0);(10;-8)\}$

تمرين 2 — Exercise 2

باستعمال مبرهنة فيثاغورس نجد: $c^2=a^2+b^2\ge 2ab$ منه: $c\ge\sqrt{2ab}$

لدينا : $\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)=1+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{c^2}{ab}=1+c\left(\frac{a+b}{ab}\right)+\frac{a^2+b^2}{ab}$

و بما أن: $\frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2$ و $\begin{cases} a+b\ge 2\sqrt{ab} \\ c\ge\sqrt{2ab} \end{cases} \Rightarrow c(a+b)\ge 2\sqrt{2}\,ab \Rightarrow c\left(\frac{a+b}{ab}\right)\ge 2\sqrt{3}$

فإن: $\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\ge 3+2\sqrt{2}$

يمكن استعمال متفاوتة « كوشي شوارتز » مباشرة: $\forall(x,y,a,b)\in IR^{+4}\ (x+y)(a+b)\ge\left(\sqrt{ax}+\sqrt{by}\right)^2$

فنجد: $\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\ge\left(1+\frac{c}{\sqrt{ab}}\right)^2\ge ....$

Exercise 3 — تمرين 3

لدينا حسب المعطيات ($10+k$ يمثل باقي قسمة a_k على 100)

منه: $\forall k \in \{1,2..,9\}\ a_k = 100q_k + (10+k) \quad / q_k \in IN$

منه: $\forall k \in \{1,2..,9\}\ a_k^2 = 10000q_k^2 + 100 + k^2 + 2000q_k + 200k\,q_k + 20k$

$a_k^2 = 100\sim_k + 20k + k^2 \quad / \sim_k = \left(100q_k^2 + 1 + 20q_k + 2k\,q_k\right)$

$$\sum_{k=1}^{9} a_k^2 = 100\sum_{k=1}^{9}\sim_k + 20\sum_{k=1}^{9}k + \sum_{k=1}^{9}k^2 \quad / \sim_k \in IN$$

$$\sum_{k=1}^{9} a_k^2 = 100\sum_{k=1}^{9}\sim_k + 20\times 45 + 285 \quad / \sim_k \in IN$$

منه:

$$\sum_{k=1}^{9} a_k^2 = 100\sum_{k=1}^{9}\sim_k + 1185 \quad / \sim_k \in IN$$

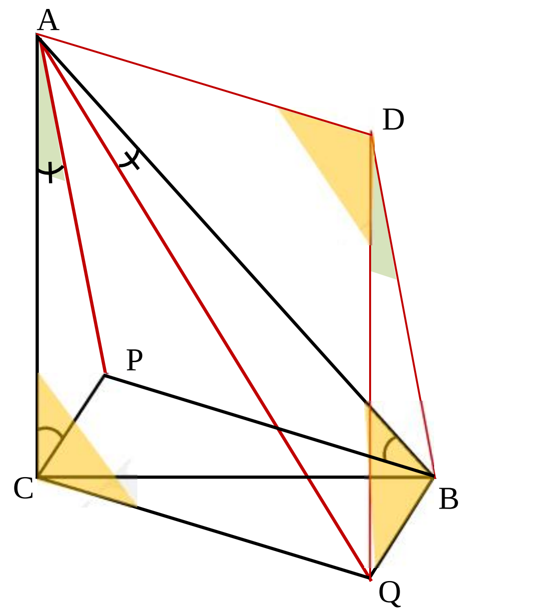
$$\sum_{k=1}^{9} a_k^2 = 100\sum_{k=1}^{9}\sim_k + 20\times 45 + 285 \quad / \sim_k \in IN$$

$$\sum_{k=1}^{9} a_k^2 = 100\left(\sum_{k=1}^{9}\sim_k + 11\right) + 85 \quad / \sim_k \in IN$$

و بما أن : $0 \le 85 < 100$ فإن باقي القسمة الاقليدية ل $\sum_{k=1}^{9} a_k^2$ على 100 هو 85، و هو ما يجيب عن السؤال.

يمكن أثناء الحساب استعمال الصيغ : $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ و $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercise 4 — تمرين 4



نعتبر D صورة A بالإزاحة $T = t_{\overrightarrow{PB}}$

و لكون $PBQC$ متوازي أضلاع فإن :

$T(A) = D$ و $T(P) = B$ و $T(Q) = D$

إذن لدينا : $T\left(P\hat{A}C\right) = B\hat{D}Q$: منه $(1)\ P\hat{A}C = B\hat{D}Q$

لدينا $PBQC$ متوازي أضلاع : منه $P\hat{C}Q = P\hat{B}Q$

منه: $(2)\ A\hat{C}Q = A\hat{C}P + P\hat{C}Q = A\hat{B}P + P\ddot{B}Q = A\hat{B}Q$

لدينا $ADQC$ متوازي أضلاع : منه $(3)\ A\hat{C}Q = A\hat{D}Q$

من (2) و (3) نستنتج أن : $A\hat{B}Q = A\hat{D}Q$ ، مما يعني أن الرباعي $ADBQ$ دائري ، إذن : $B\hat{A}Q = B\hat{D}Q$ (4) (زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس)

من (1) و (4) نستنتج أن : $\boxed{P\hat{A}C = B\hat{A}Q}$

حل هذا التمرين من اقتراح أحد التلاميذ المشاركين في هذا الأولمبياد.