

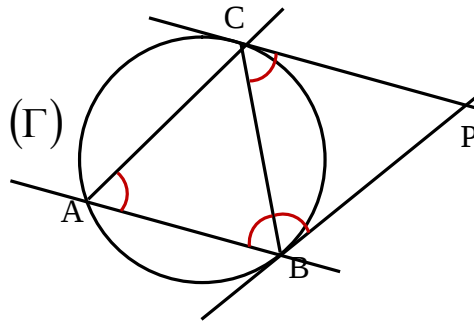
Exercise 1

تمرين 1

بداية وبملاحظة أن 1 حل للمعادلة $x^3 - 3x^2 + (a+2)x - a = 0$ ، نستنتج أن الحدودية $P(x) = x^3 - 3x^2 + (a+2)x - a$ تقبل القسمة على $x-1$ ، بعد إجراء القسمة الاقليدية نجد: $P(x) = (x-1)(x^2 - 2x + a)$
 حسب المعطيات المعادلة $x^2 - 2x + a = 0$ ستقبل حلين a و b حيث $\{a, b\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ و $a < b$
 و نعلم أن: $a + b = 2$ إذن $2a < a + b < 2b$ منه $a < 1 < b$
 بالتالي: $x_1 = a$ و $x_2 = 1$ و $x_3 = b$
 الآن نجيب عن السؤال: $4x_1 - x_1^2 + x_3^2 = 4a - a^2 + b^2 = 4a + (b+a)(b-a) = 4a + 2(b-a) = 2a + 2b = 4$

Exercise 2

تمرين 2



لدينا $\widehat{CAB} = \widehat{BCP} = \widehat{CBP}$ ثلاث زوايا محيطية تحصر القوس BC (عند وجود مماس يكون هناك أيضا زوايا محيطية تحصر قوسا)
 وبما أن $(AB) \parallel (CP)$ و (CB) قاطع لهما فإن: $\widehat{CBA} = \widehat{BCP}$
 منه: $\widehat{CAB} = \widehat{BCP} = \widehat{CBP} = \widehat{CBA}$ إذن المثلثان ABC و PCB متشابهان ($\widehat{CAB} = \widehat{BCP}$ و $\widehat{CBP} = \widehat{CBA}$)
 إذن: $\frac{BP}{BC} = \frac{BC}{AB}$ منه: $\frac{4}{BC} = \frac{BC}{3}$ منه: $BC^2 = 12$ بالتالي: $BC = \sqrt{12}$

للمزيد عن الزوايا المحيطية تصفح الرابط: <http://goo.gl/qKYKIU>

وللمثلثات المتشابهة الرابط: <http://goo.gl/F7s8Ck>

Exercise 3

تمرين 3

$$|(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)| \leq \frac{abcd}{4} \Leftrightarrow \left| \left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}} \right) \left(\frac{b-c}{\sqrt{bc}} \right) \left(\frac{c-d}{\sqrt{cd}} \right) \left(\frac{d-a}{\sqrt{ad}} \right) \right| \leq \frac{1}{4}$$

لدينا:

$$\Leftrightarrow \left| \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \left(\sqrt{\frac{b}{c}} - \sqrt{\frac{c}{b}} \right) \left(\sqrt{\frac{c}{d}} - \sqrt{\frac{d}{c}} \right) \left(\sqrt{\frac{d}{a}} - \sqrt{\frac{a}{d}} \right) \right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4$$

إذن لإثبات المتفاوتة يكفي أن نبين أن: $\forall (x, y) \in [1, 2]^2 \quad \left| \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$(x, y) \in [1, 2]^2 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\frac{x}{y}} \leq \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\frac{y}{x}} \leq \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\frac{x}{y}} \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \leq -\sqrt{\frac{y}{x}} \leq \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ بالفعل لدينا :}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \leq \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left| \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

و هذا ينهي البرهان.

$$\left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| = \left| \sqrt{\frac{b}{c}} - \sqrt{\frac{c}{b}} \right| = \left| \sqrt{\frac{c}{d}} - \sqrt{\frac{d}{c}} \right| = \left| \sqrt{\frac{d}{a}} - \sqrt{\frac{a}{d}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ التساوي يتحقق إذا كان}$$

$$\left| \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \text{ ولدينا :}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(t = 2 \text{ ou } t = \frac{1}{2} \right) : t = \frac{x}{y} \text{ نضع :}$$

$$\left| \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} = 2 \text{ ou } \frac{y}{x} = 2 \right) \Leftrightarrow (x = 2y \text{ ou } y = 2x) \text{ منه :}$$

$$y = 2x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \text{ بالمثل } x = 2y \Rightarrow 2y \leq 2 \Rightarrow 1 \leq y \leq 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2 \text{ فإن } (x, y) \in [1, 2]^2 \text{ ولكون :}$$

$$\left| \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (x, y) \in \{(1, 2); (2, 1)\} \text{ منه :}$$

$$(d, a) \in \{(1, 2); (2, 1)\} \text{ و } (c, d) \in \{(1, 2); (2, 1)\} \text{ و } (b, c) \in \{(1, 2); (2, 1)\} \text{ و } (a, b) \in \{(1, 2); (2, 1)\} \text{ إذا كان}$$

$$(a, b, c, d) = (2, 1, 2, 1) \text{ أو } (a, b, c, d) = (1, 2, 1, 2) \text{ مما يعني أن :}$$

في المعادلة أعلاه استعملنا المحددة لإيجاد حلولها

الحلول المقترحة هي حلول شخصية وليست حلولاً رسمية