

Exercise 1

تمرين 1

$$\text{لدينا : } (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = ab + \frac{a^2 + b^2}{2} + 2xy = \frac{(a+b)^2}{2} + 2xy$$

$$\text{منه : } 2(x+y)^2 = (a+b)^2 + 4xy$$

$$\text{وبما أن : } 4xy \leq (x+y)^2 \text{ فإن : } 4xy + (a+b)^2 \leq (x+y)^2 + (a+b)^2 \text{ منه : } 2(x+y)^2 \leq (x+y)^2 + (a+b)^2$$

$$\text{منه : } (x+y)^2 \leq (a+b)^2$$

$$\text{ولكون } a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ أعداد موجبة فإننا نستنتج أن : } x+y \leq a+b \text{ بالتالي : } \frac{x+y}{2} \leq \frac{a+b}{2}$$

Exercise 2

تمرين 2

$$\text{للتبسيط نرمز للنظمة } (S) \text{ ، أولا ندرس بعض الحالات الخاصة : } \begin{cases} x^2 + x = y^3 - y \\ y^2 + y = x^3 - x \end{cases}$$

$$\text{■ إذا كان } x=0 \text{ أو } x=-1 \text{ فإن : } \begin{cases} 0 = y^3 - y \\ y^2 + y = 0 \end{cases} \text{ منه : } \begin{cases} y(y-1)(y+1) = 0 \\ y(y+1) = 0 \end{cases} \text{ منه } y=0 \text{ أو } y=-1 \text{ (1 لن تحقق المعادلتين معا)}$$

$$\text{■ إذا كان } \begin{cases} x \neq -0 \\ x \neq -1 \end{cases} \text{ فإن :}$$

$$\text{من جهة : } (S) \Rightarrow \begin{cases} x(x+1) = y(y+1)(y-1) \\ x(x+1)(x-1) = y(y+1) \end{cases} \text{ بما أن } \begin{cases} x \neq -0 \\ x \neq -1 \end{cases} \text{ فإن : } \begin{cases} x(x+1) \neq 0 \\ y(y+1)(y-1) \neq 0 \end{cases} \text{ منه } y \neq -1$$

$$\text{الآن نستنتج بقسمة طرفي النظمة على : } xy - x - y + 1 = 1 \Rightarrow x-1 = \frac{1}{y-1} \Rightarrow xy - x - y + 1 = 1 \text{ منه } x+y = xy \text{ (*)}$$

$$(S) \Rightarrow (x^2 + x) + (x^3 - x) = (y^3 - y) + (y^2 + y) \Rightarrow x^2 + x^3 = y^3 + y^2$$

$$\text{الآن و من جهة أخرى : } (S) \Rightarrow (x^2 - y^2) + (x^3 - y^3) = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y+x^2+xy+y^2) = 0$$

$$(S) \Rightarrow (x=y) \text{ ou } (x^2 + xy + y^2 + x + y = 0)$$

$$\text{إذا كان } x=y \text{ فإن النظمة تصبح : } \begin{cases} x=y \\ x^3 - x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=0 \text{ ou } x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=0 \text{ ou } x=-1 \text{ ou } x=2 \end{cases}$$

$$\text{إذا كان } x^2 + xy + y^2 + x + y = 0 \text{ فإننا نستنتج من (*) أن : } x^2 + 2xy + y^2 = 0 \text{ منه : } (x+y)^2 = 0 \text{ منه : } x+y=0$$

$$\text{ومن (*) نستنتج من جديد أن أن } xy=0 \text{ وهذا غير ممكن لأننا في حالة } \begin{cases} x \neq -0 \\ x \neq -1 \end{cases} \text{ وسبق وبرهنا أن } y \neq 0$$

$$\text{خلاصة بعد التحقق من الحلول المحصل عليها بالاستنتاجات السابقة يكون لدينا : } S = \{(0;0); (0;-1); (-1;0); (-1;-1); (2;2)\}$$

تمرين يتطلب دقة كبيرة في التحليل الرياضي و الاستدلال السليم مع الحرص على دراسة كل الحالات الممكنة باستعمال مبادئ المنطق (العطف ، فصل الحالات...)

يمكن حل النظمة بطريقة أخرى لكننا فضلنا إزاحة بعض الحالات التي إن لم يتم عزلها في دراسة مستقلة ينبثق منها حالات كثيرة.

