السنة الدراسية: 2014/2013	أولمبياد الرياضيات 2015 الفرض الأول الجمعة 15 نونبر 2013 حلول مقترحة	السنة الأولى علوم رياضية

Exercise 1 — تمرين 1

نعلم أن : $x_1 + x_2 = -p$ و $x_1\,x_2 = q$

منه: $q - p = x_1.x_2 + x_1 + x_2$

$$\begin{cases}|q-p|=1\\|x_1-x_2|=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|x_1.x_2+x_1+x_2|=1\\|x_1-x_2|=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x_1.x_2+x_1+x_2)^2=1\\(x_1-x_2)^2=1\end{cases} \Rightarrow (x_1.x_2+x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2=0$$

منه :
$$\Rightarrow (x_1.x_2+2x_1)(x_1.x_2+2x_2)=0 \Rightarrow x_1\,x_2\,(x_1+2)(x_2+2)=0$$
$$\Rightarrow x_1=0 \;ou\; x_1=-2 \;ou\; x_2=0 \;ou\; x_2=-2$$

- إذا كان : $x_1=0$ فإننا نستنتج أن : $\begin{cases}q=0\\|p|=1\\|x_2|=1\end{cases}$ مما يبين أن كل الأعداد المطلوبة صحيحة نسبية
- إذا كان : $x_1=-2$ فإننا نستنتج أن : $|2+x_1|=1$ منه : $x_1=-1$ أو $x_1=-3$ منه : $x_1 \in Z$
  و منه: $p=-x_1-x_2=2-x_2 \in \{3;5\} \subset Z$ و $q=x_1x_2=-2x_2 \in \{2;6\} \subset Z$
- بالمثل (نظرا للتماثل)نجد نفس النتيجة في الحالتين المتبقيتين .

خلاصة: في جميع الحالات نجد أن الأعداد المطلوبة أعداد صحيحة نسبية.

رغم توصلنا لقيم صحيحة للأعداد المطلوبة منذ البداية ($x_1=0 \;ou\; x_1=-2 \;ou\; x_2=0 \;ou\; x_2=-2$)، لكن ذلك لا يعني نهاية الجواب لأن القيم المحصل عليها ليست قيما تأخذها هذه الأعداد في نفس الوقت ، أي أن الرابط ليس "الواو".

Exercise 2 — تمرين 2

$$\begin{cases}x^2-4y+7=0\\y^2-6z+14=0\\z^2-2x-7=0\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+14=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9=0$$

لدينا: $\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9=0$

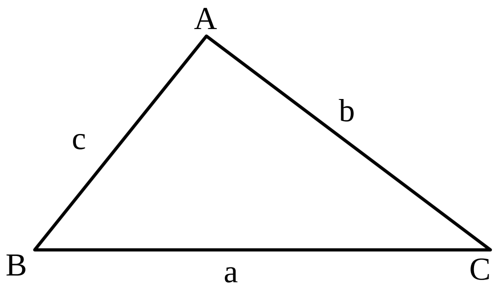
$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$$

تمرين سهل طبقنا فيه الخاصية " إذا كان مجموع عدة أعداد حقيقية موجبة منعدما فإن كل الأعداد منعدمة"

Exercise 3   تمرين 3

ليكن ABC مثلثا أطوال أضلاعه a و b و c حيث: $a \leq 2$ و $b \leq 3$ و $c \leq 4$



لدينا: $S_{(ABC)} = \frac{1}{2} ab \sin\left(\hat{C}\right) \leq \frac{a\,b}{2} \leq 3$

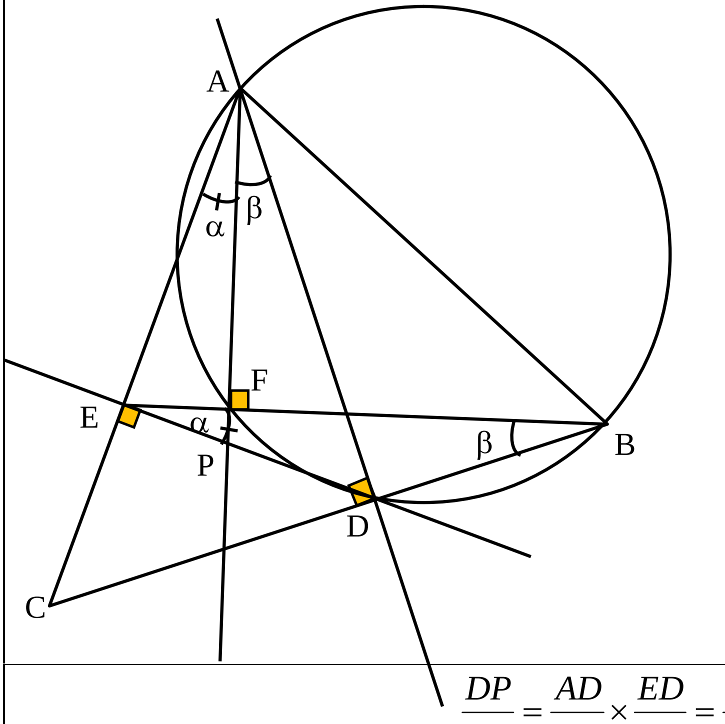
و بأخذنا: $a = 2 \leq 2$ و $b = 3 \leq 3$ و $c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \leq 4$

نحصل على مثلث قائم الزاوية في C تكون مساحته: $S_0 = \frac{a\,b}{2} = 3$

مما يعني أن المساحة $S_0 = 3$ هي أكبر مساحة ممكنة للمثلث ABC و التي يساويها عندما يكون قائم الزاوية.

استعمال صيغة هيرون يجعل التأطير صعبا و لا يفضي للقيمة القصوية، مع ذلك تبقى هذه الصيغة جد هامة حل التمرين يكمن في أن تجعل المساحة مكبورة بعدد ثم تجد مثلثا يحقق الشروط و تكون مساحته هي هذا العدد.

Exercise 4   تمرين 4



بداية نضع: $E\hat{A}P = \sim$ و $D\hat{A}P =$

بما أن الرباعي $AFDB$ دائري ، إذن بملاحظة زوايا محيطية تحصر نفس القوس .

فإننا نستنتج أن : $A\hat{F}B = A\hat{D}B = 90°$

و: $F\hat{B}D =$ منه: $F\hat{E}P = 90° - E\hat{P}F = E\hat{A}P = \sim$

الآن لدينا: في المثلثين APD و APE نجد:

$$\frac{AD}{\sin\left(A\hat{P}D\right)} = \frac{DP}{\sin(\ \ )} \quad \text{و} \quad \frac{AE}{\sin\left(A\hat{P}E\right)} = \frac{EP}{\sin(\sim)}$$

منه : $\frac{AD}{AE} = \frac{DP}{EP} \times \frac{\sin(\sim)}{\sin(\ \ )}$

(بقسمة المتساويتين طرفا بطرف)

منه : $\frac{DP}{EP} = \frac{AD}{AE} \times \frac{\sin(\ \ )}{\sin(\sim)}$

من جهة أخرى في المثلث : $\frac{ED}{DB} = \frac{\sin(\ \ )}{\sin(\sim)}$ ، منه : $\frac{DP}{EP} = \frac{AD}{AE} \times \frac{ED}{DB} = \frac{AD \times ED}{AE \times DB}$

من جهة أخرى لدينا : $\tan\left(E\hat{A}D\right) = \frac{ED}{AE} = \frac{CD}{AD}$ منه : $ED \times AD = CD \times AE$

بالتالي: $\frac{DP}{EP} = \frac{AD \times ED}{AE \times DB} = \frac{CD \times AE}{AE \times DB} = \frac{CD}{DB}$

الحلول المقترحة هي حلول شخصية و ليست حلولا رسمية