01. التمرين الاول :-

1. أحسب u_0 و u_1 و v_0 و v_1 .

لدينا : $u_0=\frac{1}{4}\left(2^0+4\times 0-5\right)=-1$ و $u_1=\frac{1}{4}\left(2^1+4\times 1-5\right)=\frac{1}{4}$.

$v_0=\frac{1}{4}\left(2^0-4\times 0+5\right)=\frac{3}{2}$ و $v_1=\frac{1}{4}\left(2^1-4\times 1+5\right)=\frac{3}{4}$

2. أ- نبين أن المتتالية a_n هندسية و أساسها 2 :

لدينا :

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=u_{n+1}+v_{n+1}\\&=\frac{1}{4}\left(2^{n+1}+4(n+1)-5\right)+\frac{1}{4}\left(2^n-4(n+1)+5\right)\\&=\frac{1}{4}2\times 2^{n+1}\\&=2^n\end{aligned}$$

إذن : $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2$

خلاصة : المتتالية a_n هندسية و أساسها 2 :

ب- نحسب المجموع $S_1=\sum_{i=0}^{i=n}a_i=a_0+a_1+\cdots a_n$

بما أن a_n هندسية و أساسها 2

لدينا :

$$\begin{aligned}S_1&=a_0\times\frac{1-2^{n-0+1}}{1-2}\\&=\left(u_0+v_0\right)\times\left(-1+2^{n-0+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(-1+2^{n+1}\right)\\&=2^n-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. أ - نبين أن المتتالية b_n حسابية و نحدد عناصرها المميزة :

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=\left(u_{n+1}-v_{n+1}\right)-\left(u_n-v_n\right)\\&=\frac{1}{4}\left(8n-2-8n+16\right)=2\end{aligned}$$

خلاصة : b_n متتالية حسابية و نحدد عناصرها المميزة :

ب- نحسب المجموع $S_2=\sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0+b_1+\cdots b_n$

لدينا :

$$S_2=\sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0+b_1+\cdots b_n$$
$$=\frac{b_0+b_n}{2}\times(n-0+1)$$
$$=\left(-\frac{5}{2}+2n-\frac{5}{2}\right)\frac{n+1}{2}$$
$$=\left(n-\frac{5}{2}\right)(n+1)$$

4. نستنتج المجموعين : $S_3=\sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0+u_1+\cdots u_n$ و $S_4=\sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0+v_1+\cdots v_n$

لدينا : $a_n+b_n=2u_n$ ومنه : $u_n=\frac{a_n+b_n}{2}$

إذن :

$$S_3=\frac{a_0+b_0}{2}+\frac{a_1+b_1}{2}+\cdots+\frac{a_n+b_n}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(a_0+a_1+\ldots+a_n)+(b_0+b_1+\ldots+b_n)$$
$$=\frac{1}{2}\times(S_1+S_2)$$
$$=2^{n-1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(n-\frac{5}{2}\right)(n+1)$$
$$=2^{n-1}+\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{4}n-\frac{3}{2}$$

لدينا : $a_n-b_n=2v_n$ ومنه : $u_n=\frac{a_n-b_n}{2}$.

إذن : $$S_4=\frac{a_0-b_0}{2}+\frac{a_1-b_1}{2}+\cdots+\frac{a_n-b_n}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(a_0+a_1+\ldots+a_n)-(b_0+b_1+\ldots+b_n)$$
$$=\frac{1}{2}\times(S_1-S_2)$$
$$=2^{n-1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(n-\frac{5}{2}\right)(n+1)=2^{n-1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{4}n+1$$

خلاصة : $S_3=2^{n-1}+\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{4}n-\frac{3}{2}$ و $S_4=2^{n-1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{4}n+1$

التمرين الثاني: 02.

1. أحسب u_1 و u_2 .

لدينا : $u_1=\frac{2u_0}{3+\sqrt{u_0}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ و $u_2=\frac{2u_1}{3+\sqrt{u_1}}=\frac{1}{3+\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{6-\sqrt{2}}{17}$.

2. نبين أن : $\forall n\geq 0\ ;\ u_n>0$

نستدل على ذلك بالترجع :

نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$.

لدينا : $u_0=1>0$ ومنه العلاقة صحيحة ل $n=0$.

نفترض أن أن العلاقة صحيحة إلى n أي $u_n>0$.

نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$

لدينا :

$$u_n>0\Rightarrow\begin{cases}2u_n>0\\3+\sqrt{u_n}>3>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{2u_n}{3+\sqrt{u_n}}>0$$

$$\Rightarrow u_{n+1}>0$$

ومنه العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n\geq 0\ ;\ u_n>0$

3. نبين أن : u_n تناقصية :

لدينا :
$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{3+\sqrt{u_n}}-u_n$$

$$=-\frac{u_n\left(1+\sqrt{u_n}\right)}{3+\sqrt{u_n}}<0$$ (لأن $u_n>0$)

ومنه : $u_{n+1}<u_n$

خلاصة : u_n تناقصية .

4. أ - نبين أن : $u_{n+1}<\frac{2}{3}u_n$

لدينا :

$$3+\sqrt{u_n} > 3 \Rightarrow \frac{1}{3+\sqrt{u_n}} \le \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n}{3+\sqrt{u_n}} \le \frac{2u_n}{3}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \le \frac{2u_n}{3}$$

خلاصة : $u_{n+1} \le \frac{2}{3}u_n$

ب – نستنتج أن $u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$:

لدينا : $u_{n+1} \le \frac{2}{3}u_n$

من أجل $n=0$ نحصل على $\cancel{u_1} \le \frac{2}{3}u_0$

من أجل $n=1$ نحصل على $\cancel{u_2} \le \frac{2}{3}\cancel{u_1}$

من أجل $n=2$ نحصل على $u_3 \le \frac{2}{3}\cancel{u_2}$

....

.... $\cancel{\ }$

من أجل $n-2$ نحصل على $\cancel{u_{n-1}} \le \frac{2}{3}\cancel{u_{n-2}}$

من أجل $n-1$ نحصل على $u_n \le \frac{2}{3}\cancel{u_{n-1}}$

المتفاوتات حدودها موجبة جذاؤها طرف بطرف نحصل بعد الاختزال على :

$u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \times u_0$ (و نعلم أن : $u_0 = 1$)

إذن : $u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ و لدينا $u_n > 0$ حسب ما سبق ومنه : $0 < u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

خلاصة : $0 < u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

التمرين 3:

.1 أحسب u_1 و u_2 .

لدينا : $u_1 = \frac{2}{1+u_0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ و $u_2 = \frac{2}{1+u_1} = \frac{4}{3}$.

خلاصة : $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_2 = \frac{4}{3}$.

.2 نبين أن : $\forall n \geq 0 \; ; \; 0 \leq u_n \leq 3$

نستدل على ذلك بالترجع :

نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$.

لدينا : $u_0 = 3$ و منه $0 \leq u_0 \leq 3$ ومنه العلاقة صحيحة ل $n = 0$.

نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $0 \leq u_n \leq 3$.

نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$

لدينا :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 3 &\Rightarrow 1 \leq u_n + 1 \leq 4 \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{1+u_n} \leq 2 \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 2 \leq 3 \\ &\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3 \end{aligned}$$

ومنه العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n \geq 0 \; ; \; 0 \leq u_n \leq 3$

.3 أ- أحسب v_0 و v_1 .

لدينا : $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$ و $v_1 = \frac{u_1 - 1}{u_1 + 2} = -\frac{1}{5}$

ب- نبين أن المتتالية v_n هندسية و أساسها $q = -\frac{1}{2}$:

لدينا :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2}=\frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}}=\frac{1-u_n}{4+2u_n}=-\frac{1}{2}\times\frac{u_n-1}{4+2u_n}=-\frac{1}{2}\times v_n$$

إذن : $v_{n+1}=-\frac{1}{2}\times v_n$

خلاصة : المتتالية a_n هندسية و أساسها $q=-\frac{1}{2}$:

ج - كتابة u_n و v_n بدلالة n .

- نكتب u_n بدلالة n .

بما أن a_n هندسية و أساسها 2 $q=-\frac{1}{2}$:

$$v_n=v_{n_0}\times q^{n-n_0}\quad ;\ (n_0=0)$$

لدينا :

$$=v_0\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

خلاصة : $v_n=\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

- نكتب u_n بدلالة n .

لدينا :

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}\Leftrightarrow v_n(u_n+2)=u_n-1$$

$$\Leftrightarrow v_nu_n-u_n=-1-2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-1-2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n=\frac{-1-2v_n}{v_n-1}=\frac{2v_n+1}{1-v_n}$$

و منه : $u_n=\frac{1+2v_n}{1-v_n}$ و بالتالي : $u_n=\frac{1+2\times\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ (لأن : $v_n=\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$)

ه – حساب u_{10} :

لدينا : $u_{10}=\frac{2\times\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}+1}{1-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}}=\frac{1+\frac{2}{2^9\times5}}{1-\frac{1}{2^9\times5}}=\frac{2+2^9\times5}{2^9\times5-1}=\frac{2562}{2559}\simeq1,0011$

التمرين 4:

.1 طبيعة المتتاليات u_n محددا عناصرها المميزة .

لدينا : $u_1 = 3$ و $u_2 = 7$ و $u_3 = 11$ و $u_4 = 15$

ومنه : نستنتج بأن المتتالية u_n حسابية أساسها $r = 4$ و حدها الأول هو $u_1 = 3$.

.2 عدد عود الثقاب الضرورية للإنشاء الهرم المتكون من 100 طابق :

بما أن : u_n حسابية أساسها $r = 4$ و حدها الأول هو $u_1 = 3$.

إذن :

$$S = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots u_n S_2$$

$$= \frac{u_1 + u_n}{2} \times (n - 1 + 1)$$

$$= \frac{3 + (3 + (n-1) \times 4)}{2} (n+1) \ ; \ [u_n = u_1 + (n-1) \times r]$$

$$= 3 + 2 \times (n-1)$$

ومنه : عدد عود الثقاب الضرورية لإنشاء هرم متكون من 100 طوابق هو :

$$S_{100} = \frac{3 + (3 + 4 \times (100-1))}{2} \times (100 - 1 + 1) = 201 \times 100 = 20100$$ (مع $n = 100$).

خلاصة : عدد عود الثقاب الضرورية لإنشاء هرم متكون من 100 طوابق هو : 20100 عود من عود الثقاب.

تصحيح السلسلة رقم 7 الدورة الاولى
من طرف التلميذ المهدي قصير

Le : 26/01/2015 23:02:38