

سلسلة 1	المتتاليات حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
		تمرين 1 : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 ; n \geq 0 \end{cases}$
<p>لنبين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times 2^n + 1$</p> <p>بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 4$ و $3 \times 2^0 + 1 = 3 + 1 = 4$ منه : $u_0 = 3 \times 2^0 + 1$</p> <p>نفترض أن: $u_n = 3 \times 2^n + 1$ ونبين أن: $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$</p> <p>لدينا: $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(3 \times 2^n + 1) - 1 = 2 \times 3 \times 2^n + 2 - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$</p>		
تمرين 2 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 ; n \geq 0 \end{cases}$		
$u_2 = 3u_1 - 4$ $u_2 = 33 - 4 = 29$	$u_1 = 3u_0 - 4$ $u_1 = 15 - 4 = 11$	1
<p>لنبين بالترجع أن $u_n > 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$</p> <p>بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 5$ منه : $u_0 > 2$</p> <p>نفترض أن: $u_n > 2$ ونبين أن: $u_{n+1} > 2$</p> <p>لدينا: $u_n > 2 \Rightarrow 3u_n > 6 \Rightarrow 3u_n - 4 > 6 - 4 \Rightarrow u_{n+1} > 2$</p>		2
<p>لدينا: $0 < 2(u_n - 2) = 2u_n - 4 = 3u_n - 4 - u_n = u_{n+1} - u_n$ ، إذن (u_n) تزايدية</p> <p>لاحظ أننا استعملنا السؤال الثاني لدراسة رتبة المتتالية وهذا الأمر يكون ضروريا في أغلب المتتاليات.</p>		3
		تمرين 3 : $u_0 = 3$; $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right)$
<p>لنبين بالترجع أن $u_n \geq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$</p> <p>بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 3$ منه : $u_0 \geq 2$</p> <p>نفترض أن: $u_n \geq 2$ ونبين أن: $u_{n+1} \geq 2$</p> <p>لدينا: $u_{n+1} \geq 2$ منه : $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right) - 2 = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} - 4 \right) = \frac{1}{2} \frac{u_n^2 + 4 - 4u_n}{u_n} = \frac{(u_n - 2)^2}{2u_n} \geq 0$</p> <p>بالتالي: $u_n \geq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ أي أن u_n مصغورة بـ 2</p> <p>لاحظ أننا استعملنا طريقة مغايرة للطريقة السابقة ، لأن التأطير المباشر لا يؤدي للنتيجة المطلوبة.</p>		1
<p>لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right) - u_n = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + 4 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{4 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(2 + u_n)(2 - u_n)}{2u_n}$</p> <p>وبما أن $u_n \geq 2$ (حسب السؤال السابق) فإن $2 - u_n \leq 0$ و $2 + u_n > 0$ و $2u_n > 0$ ومنه : $u_{n+1} - u_n \leq 0$</p> <p>وبالتالي: (u_n) تناقصية</p>		2
		تمرين 4 : $u_0 = 4$; $u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2}$
<p>لنبين بالترجع أن $u_n \geq 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$</p> <p>بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 4$ منه : $u_0 \geq 3$</p> <p>نفترض أن: $u_n \geq 3$ ونبين أن: $u_{n+1} \geq 3$</p> <p>لدينا: $u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3 - 3(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - 3u_n - 6}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$</p> <p>لدينا: $u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 6u_n + 3u_n - 9}{u_n + 2} = \frac{2u_n(u - 3) + 3(u_n - 3)}{u_n + 2} = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}$</p>		1

وبما أن $u_n \geq 3$ (حسب الافتراض) فإن $u_n - 3 \geq 0$ و $2u_n + 3 > 0$ و $u_n + 2 > 0$

إذن $u_{n+1} - 3 \geq 0$ ومنه: $u_{n+1} \geq 3$

يمكن استعمال المحددة لتعميل التعبير $2u_n^2 - 3u_n - 9$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$$

لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + u_n - 3u_n - 3}{u_n + 2} = \frac{u_n(u_n + 1) - 3(u_n + 1)}{u_n + 2} = \frac{(u_n + 1)(u_n - 3)}{u_n + 2}$$

بما أن $u_n \geq 3$ فإن $u_n - 3 \geq 0$ و $u_n + 1 > 0$ و $u_n + 2 > 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$

وبالتالي: (u_n) تزايدية

2

لاحظ أن تقنية استعمال الفرق جد مهمة، لكن يمكن البرهان مباشرة في بعض الحالات كما هو الشأن في التمرين 1

تمرين 5: $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$; $u_0 = 1$

▪ بالنسبة لـ $n = 0$ $u_0 = 1 \geq \sqrt{0}$

▪ نفترض أن $u_n \geq \sqrt{n}$ ونبين أن $u_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$

$$\text{لدينا: } u_n \geq \sqrt{n} \Rightarrow u_n^2 \geq n \Rightarrow (u_{n+1})^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \geq n + 2 \Rightarrow u_{n+1} \geq \sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$$

تقنية الفرق أو حتى التأطير المباشر كلاهما غير مجديان، لذلك نحاول التأطير عبر المرور بالمربع.

فكرة التمرين بسيطة لكنها تغني عن أسطر كثيرة في حال اتباع طريقة أخرى.

تمرين 6: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k^2} = \frac{k - (k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{1}{k^2(k-1)} > 0$$

1

بالتالي: $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$u_n - 1 < 1 - \frac{1}{n} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \dots < \dots \\ \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \end{array} \right. \quad \text{لدينا حسب السؤال السابق:}$$

2

منه: $u_n < 2 - \frac{1}{n}$ منه: $u_n < 2$ بالتالي (u_n) مكبورة بالعدد 2

الكتابة $u_n < 2 - \frac{1}{n}$ لا تكفي للقول أن u_n مكبورة لأن $2 - \frac{1}{n}$ ليس تعبيراً ثابتاً بل مرتبطاً بـ n

تمرين 7: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

▪ بالنسبة لـ $n = 1$ $u_1 = 1 \geq \sqrt{1}$

▪ نفترض أن $u_n \geq \sqrt{n}$ ونبين أن $u_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$

$$\text{لدينا: } u_n \geq \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$$

1

الأصح أعلاه استعمال الرمز \geq عوض $=$ ، لكننا استعملناه فقط لنبين حالات التساوي وحالات التأطير

	<p>يمكن حل التمرين دون ترجع، لكن الهدف هو إتقان البرهان بالترجع 🌱</p>	
	<p>نفترض أن (u_n) مكبورة إذن: $\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}^* u_n \leq M$ منه: $\forall n \in \mathbb{N}^* \sqrt{n} \leq M$ منه: $\forall n \in \mathbb{N}^* M^2 \geq n$ وهذا غير ممكن لأن مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية غير محدودة، بالتالي (u_n) غير مكبورة</p>	2
	<p>تمرين 8: $u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$</p>	
	<p>لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}^* \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$</p>	1
	<p>$\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$</p>	2
	<p>تمرين بسيط، لكنه لم يكن ليكون سهلا لولا السؤال الأول 🌱</p>	