التمرين 1

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3-U_n} \end{cases}$

1) أحسب U_1 و U_2.
2) بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 < U_n < 2$
3) تحقق أن : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{(3 - U_n)}$
4) نضع : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - 2}$
أ- بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
ب - حدد (V_n) بدلالة n
ج- استنتج (U_n) بدلالة n ، بين أولا أن $\left(U_n = \dfrac{2V_n - 1}{V_n - 1}\right)$

التمرين 2

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} U_1 = 1 \ ; \ U_2 = \frac{2}{3} \\ U_{n+2} = \frac{2}{3}U_{n+1} - \frac{1}{9}U_n \quad ; (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

نضع : $V_n = U_{n+1} - \dfrac{1}{3}U_n$ و $w_n = 3^n U_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

1) بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ثم حدد V_n بدلالة n.
2) أ- بين أن (w_n) متتالية حسابية أساسها 3.
ب) اكتب w_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n.
3) أ- بين أن $0 < U_{n+1} \leq \dfrac{2}{3}U_n$ $(\forall \in \mathbb{N}^*)$ ثم استنتج رتابة $(U_n)_{n\geq 1}$
ب) استنتج أن $0 < U_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
2) نضع : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ بين أن $(S_n)_{n\geq 1}$ تزايدية ومكبورة ب 3.

التمرين 3

تحتوي كل مادة حية في أنسجتها على الكربون 14، بعد موتها الكربون 14 الإشعاعي يتفتت بنسبة 1.2% كل مائة سنة.
بقياس درجة التفتت يتمكن الأركيولوجيون من تحديد العصر الذي تنتمي إليه هذه المادة الحية.
نعتبر عينة من مادة تحتوي على $5g$ من الكربون 14.
لتكن U_n كمية الكربون 14 بالغرام التي تحتويها المادة بعد $n \times 100$ سنة.

1) حدد U_1 و U_2 و U_3.
2) أ- حدد U_n بدلالة n.
ب - كم ستحتوي هذه المادة من الكربون 14 بعد مرور 1000 سنة؟ ثم بعد مرور 2500 سنة؟
3) اكتشف بمغارة عينة من هذه المادة تحتوي على $2.5g$ من الكربون 14.
إلى أي عهد ترجع هذه المادة؟