

سلسلة 2	المجموعات والتطبيقات حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
<p>تمرين 1: لتكن A و B و C ثلاث مجموعات غير فارغة. بين أن :</p>		
	$(A \cap B) \cup (A \setminus B) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap E = A$	1
	$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \setminus (B \cup C)$	2
	$A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{(A \cap \bar{B})} = A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$	3
<p>لنبين الاستلزام: $B = C \Rightarrow A \times B = A \times C$ نفترض أن $B = C$ ونبين أن $A \times B = A \times C$ ليكن $(x, y) \in A \times C \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B$ (لأن: $y \in B \Leftrightarrow y \in C$)</p> <p>الآن لنبين الاستلزام العكسي: $A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$ نفترض أن $A \times B = A \times C$ ونبين أن $B = C$ بما أن $A \neq \emptyset$ فهي تحتوي على الأقل على عنصر و ليكن مثلا a الآن لدينا: $x \in B \Leftrightarrow (a, x) \in A \times B \Leftrightarrow (a, x) \in A \times C \Leftrightarrow x \in C$ بالتالي: $B = C$</p> <p>خلاصة: $A \times B = A \times C \Leftrightarrow B = C$</p> <p>السؤال الرابع هو سؤال سهل/صعب، سهل إذا أدركنا جيدا مفهوم الجداء الديكارتي لمجموعتين، وصعب إذا كنا نفهمه على أنه شبيه بعملية ضرب الأعداد و نحاول الانتقال في البرهان بشكل غير معلل و ارتجالي نتيجة عدم فهمنا لهذا الجداء.</p>		
<p>تمرين 2: لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين.</p>		
	$(A \cap B) \cup (A \setminus B) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap E = A$	1
	$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) = \{1; 2; 3\} \cup \{4; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ <p>لإيجاد المجموعة B سنبين المتساوية: $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$ لدينا: $(A \cup B) \setminus A = (A \cup B) \cap \bar{A} = (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}) = \emptyset \cup (B \cap \bar{A}) = B \cap \bar{A} = B \setminus A$ إذن: $B \setminus A = (A \cup B) \setminus A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\} \setminus \{1; 2; 3; 4; 5\} = \{6; 7; 9\}$ وبتطبيق السؤال الأول: $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A) = \{1; 2; 3\} \cup \{6; 7; 9\} = \{1; 2; 3; 6; 7; 9\}$</p>	2
<p>يمكنك تظنن التساوي $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$ عبر خطاطة لكن يجب البرهان على ذلك.</p>		
<p>تمرين 3: نضع: $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{1}{2} \geq \frac{ x }{x^2 + 1} \right\}$ ، إذن $A \subset \mathbb{R}$ ولدينا: $x \in A \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{ x }{x^2 + 1} \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2 x \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2 x \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$ بما أن العبارة: $(x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x \in A$ صحيحة فإن: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x \in A$ بالتالي: $A = \mathbb{R}$</p>		
<p>إثبات التساوي $A = \mathbb{R}$ يعني ببساطة إثبات صحة العبارة $\forall x \in \mathbb{R} \frac{1}{2} \geq \frac{ x }{x^2 + 1}$</p>		

تمرين 4: نضع: $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 2\}$ و $B = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{3x-2}{x+2} < 1\right\}$

لدينا: $x \in A \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

و $x \in B \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \frac{3x-2-x-2}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-4}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

إذن: $A = B$ بالتالي $x \in A \Leftrightarrow x \in B$

التكافؤ $\frac{x-2}{x+2} < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ نبينه باستعمال جدول الإشارات

تمرين 5: $A = \left\{\frac{f}{2} + kf / k \in \mathbb{Z}\right\}$ و $B = \left\{\frac{-f}{2} + kf / k \in \mathbb{Z}\right\}$

لدينا: $x \in A \Rightarrow x = \frac{f}{2} + kf / k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{-f}{2} + f + kf \Rightarrow x = \frac{-f}{2} + (k+1)f \Rightarrow x \in B$

و $x \in B \Rightarrow x = \frac{-f}{2} + kf / k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{f}{2} - f + kf \Rightarrow x = \frac{f}{2} + (k-1)f \Rightarrow x \in A$

بالتالي: $A = B$

رغم اختلاف تعريف المجموعتين إلا أنهما تتكونان من نفس العناصر، لذلك فهما متساويتان إجمالاً، بمعنى عندما نعطي قيمة لـ k سنجد عنصرين مختلفين، لكن توجد قيم أخرى لـ k تعطي نفس العناصر في المجموعة الأخرى.

تمرين 6: $A = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 / mn = 10\}$ و $B = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} / (a, b) \in A\right\}$

$A = \{(1; 10), (-1; -10), (10; 1), (-10; -1), (2; 5), (-2; -5), (5; 2), (-5; -2)\}$

$B = \left\{\frac{1}{10}, 10, \frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right\}$

1

كلا العبارتين $A \subset B$ و $B \subset A$ غير صحيحتان لكون المجموعة A مجموعة أزواج بينما B مجموعة أعداد جذرية

2